

Diplomarbeit

# Operationelles Risiko

Kalibrierungsprobleme und alternative Ansätze

INSTITUT FÜR WIRTSCHAFTSTHEORIE  
UND OPERATIONS RESEARCH

Universität Karlsruhe (TH)  
76128 Karlsruhe  
Prof. Dr. Karl-Heinz Waldmann

eingereicht von

Matthias Viehmann  
Durlacher Allee 28  
76131 Karlsruhe

Abgabedatum: 4. August 2006  
Betreuer: Dipl. Wi.-Ing. Dirk Potthast

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht zu haben.

Karlsruhe, 4. August 2006

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
1.1	Operationelles Risiko . . . . .	6
1.2	Kalibrierungsprobleme . . . . .	11
1.3	Risikomaße und Value-at-Risk . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Messmethoden für operationelles Risiko nach Basel II</b>	<b>14</b>
2.1	Zielsetzung . . . . .	14
2.2	Methoden . . . . .	16
2.2.1	Basisindikatoransatz . . . . .	16
2.2.2	Standardansatz . . . . .	18
2.2.3	Fortgeschrittene Messansätze . . . . .	21
2.3	Kalibrierung . . . . .	26
2.3.1	Basisindikatoransatz . . . . .	28
2.3.2	Standardansatz . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Fortgeschrittene Messverfahren für operationelles Risiko</b>	<b>32</b>
3.1	Verlustverteilungsansätze . . . . .	33
3.1.1	Verlusthöhenverteilung . . . . .	34
3.1.2	Verlusthäufigkeitsverteilungen . . . . .	51
3.1.3	Gesamtverlustverteilung . . . . .	53
3.1.4	Modellierungsprobleme . . . . .	58
3.1.5	Datenprobleme und Einbindung externer Daten . . . . .	61
3.1.6	Einbindung von Expertenmeinungen . . . . .	71
3.1.7	Einbindung von Faktoren des Geschäftsumfelds und der Kontrollumgebung . . . . .	72
3.1.8	Berücksichtigung von Versicherungen . . . . .	73
3.2	Aggregation der Einzelrisiken . . . . .	74
3.2.1	Vereinfachendes Korrelationsmodell . . . . .	75
3.2.2	Theoretische Grundlagen zu Kopulas . . . . .	77
3.2.3	Rangkorrelationskoeffizienten . . . . .	78
3.2.4	Tail-Abhängigkeit . . . . .	79
3.2.5	Ausgewählte Kopulas . . . . .	80
3.2.6	Praktische Anwendung und Kalibrierung . . . . .	82

3.3	Kausalmodelle . . . . .	88
3.3.1	Lineare Regressionsmodelle . . . . .	89
3.3.2	Neuronale Netzwerke . . . . .	92
3.3.3	Bayes-Netzwerke . . . . .	95
3.4	Scorecard-Ansätze . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Ausblick</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Kohärente Risikomaße</b>	<b>101</b>
<b>B</b>	<b>Methoden zur Parameterschätzung</b>	<b>103</b>
B.1	Eigenschaften von Schätzfunktionen . . . . .	104
B.2	Momentenmethode . . . . .	105
B.3	Methode wahrscheinlichkeitsgewichteter Momente . . . . .	105
B.4	Maximum-Likelihood-Methode . . . . .	106
B.5	Konfidenzintervalle und Standardfehler . . . . .	107
B.5.1	Verteilung der Schätzfunktion . . . . .	108
B.5.2	Profil-Likelihood-Methode . . . . .	108
B.5.3	Resampling-Verfahren . . . . .	109
<b>C</b>	<b>Beispiel eines Verlustverteilungsansatzes</b>	<b>110</b>
C.1	Verlusthöhenverteilung: POT-Methode . . . . .	110
C.2	Verlusthöhenverteilung: Block-Maxima-Methode . . . . .	120
C.3	Verlusthäufigkeitsverteilung . . . . .	124
C.4	Aggregation . . . . .	126

# Abkürzungsverzeichnis

AMA	Fortgeschrittene Messansätze
ASA	Alternativer Standardansatz
BIA	Basisindikatoransatz
ES	Expected-Shortfall
GEV	Generalized-Extreme-Value (-Verteilung)
GPD	Verallgemeinerte-Pareto-Verteilung
iid	unabhängig und identisch verteilt
LDA	Verlustverteilungsansatz
MDA	Maximum-Anziehungsbereich
MEF	Exzessmittelwertfunktion
ML	Maximum-Likelihood-Methode
OLS	Methode kleinster Quadrate
POT	Peaks-Over-Threshold (-Methode)
PWM	Methode wahrscheinlichkeitsgewichteter Momente
QIS	Auswirkungsstudie
SMEF	empirische Exzessmittelwertfunktion
STA	Standardansatz
VaR	Value-At-Risk
WLS	Methode gewichteter kleinster Quadrate

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Operationelles Risiko

Operationelle Risiken gewannen in den 90er Jahren zunehmend an Aufmerksamkeit. Spektakuläre Fälle wie die Insolvenz der Barings Bank führten das mögliche Ausmaß der bisher wenig beachteten Risikoart vor. Dabei hatte Nick Leeson über Jahre unerlaubte Transaktionen verstecken können, die in einem Milliardenverlust und der Insolvenz der Traditionsbank endeten. Tabelle 1.1 gibt einige prominente Beispiele mit den geschätzten Verlusthöhen an. Detaillierte Darstellungen weiterer Beispiele finden sich z.B. in Minz (2004) oder Cruz (2002).

Der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht<sup>1</sup> legte 1999 erstmals seine Absicht dar, *andere Risiken* in die Mindestkapitalanforderungen mit einzubeziehen (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1999). Diese anderen Risiken, die die operationellen Risiken einschließen, wurden definiert als die Risiken, die nicht dem Markt- oder Kreditrisiko<sup>2</sup> zuzuordnen sind. Diese Negativ-Definition deckt zusammen mit dem Markt- und Kreditrisiko alle möglichen Risiken ab und folgt damit dem Gedanken, alle Risiken, gleich welcher Art, mit Kapital zu hinterlegen. Jedoch ist eine negative Definition für die praktische Handhabung, d.h. die Identifizierung, Messung, Steuerung und Kontrolle von Risiken wenig hilfreich, da sie weder Aufschluss über Ursachen noch über Auswirkungen gibt.

Wegen mangelnder Quantifizierbarkeit wurde die Einbeziehung aller anderen

---

<sup>1</sup>Der Ausschuss setzt sich aus Vertretern der Bankenaufsicht der wichtigsten Industrienationen zusammen und entwirft Richtlinien für die Bankenaufsicht und die Geschäftspraktiken der Banken. Auch wenn seine Beschlüsse nicht bindend sind und Empfehlungscharakter haben, stellen sie de facto internationale Standards dar.

<sup>2</sup>Das Marktrisiko ist definiert als das Risiko von Verlusten aus bilanzwirksamen und außerbilanziellen Positionen aufgrund von Veränderungen der Marktpreise (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1996a). Das Kreditrisiko ist die aus der zeitlichen Divergenz zwischen Leistung (Kredit) und Gegenleistung (Zinszahlung, Tilgung) resultierende Gefahr, dass ein Schuldner seine im Kreditvertrag festgelegte Gegenleistung möglicherweise nicht vertragsgemäß erbringt (vgl. Kaiser 2006).

Tabelle 1.1: Beispiele schlagend gewordener operationeller Risiken

<b>Betroffene Einrichtung</b>	<b>Verlustereignis</b>	<b>Verlusthöhe</b>
Barings Bank	Unautorisierte Trading Aktivitäten	\$1 Mrd.
Daiwa Bank	30.000 unerlaubte Transaktionen über 11 Jahre	\$1,4 Mrd.
Orange County	Spekulation mit Investmentfonds	\$1,6 Mrd.
Long Term Capital Management	Verluste resultierend aus mathematischem Berechnungsmodell	\$4 Mrd.
Deutsche Bank (und 50 weitere)	Konkurs Jürgen Schneider, Kreditbetrug	2,4 Mrd. DM
Bank of New York	Schäden an Einrichtungen aufgrund des 11. September 2001	\$140 Mio.
Bank of America	Fehlgeschlagene Systemintegration	\$225 Mio.
Solomon Brothers	Umstellung des IT Systems führte zu falschen Kontoständen	\$303 Mio.

Quelle: Kaiser (2006)

Risiken in die Kapitalanforderungen im Laufe der Konsultationsphase fallen gelassen. Neben Markt- und Kreditrisiken sind in Zukunft zusätzlich nur die operationellen Risiken mit Kapital zu hinterlegen.<sup>3</sup> Die (positive) Definition operationellen Risiken, die sich im 2004 verabschiedeten zweiten Basler Akkord findet, hat sich inzwischen weitgehend durchgesetzt:

Operationelles Risiko ist die Gefahr von Verlusten, die infolge einer Unzulänglichkeit oder des Versagens von internen Verfahren, Menschen und Systemen oder infolge externer Ereignisse eintreten. Diese Definition schließt Rechtsrisiken ein, nicht jedoch strategische Risiken oder Reputationsrisiken.<sup>4</sup>

Beispiele operationeller Risiken sind interner oder externer Betrug, Fehler von Computersystemen, Fehler bei der Abwicklung von Transaktionen, fehlerhafte Modelle oder externe Ereignisse wie Feuer, Überflutungen, Erdbeben oder Terrorakte (vgl. McNeil et al. 2005).

Aus der Definition geht ein wichtiger Unterschied zu anderen Risiken hervor: Während andere Risiken sowohl die Gefahr von Verlusten als auch die

<sup>3</sup>Wichtige andere Risiken, z.B. das Liquiditätsrisiko, werden nun ausschließlich in der zweiten und dritten Säule (Aufsichtliches Überprüfungsverfahren und Markt disziplin) des Basler Akkords behandelt (vgl. Kapitel 2).

<sup>4</sup>Vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004).

Chance auf Gewinne bergen, umfasst das operationelle Risiko nur die Gefahr von Verlusten.

Weiter ist ersichtlich, dass operationelle Risiken jedem Kreditinstitut mit seiner Gründung immanent sind. Im Gegensatz zu Markt- und Kreditrisiken ist ihre Existenz nicht an das Eingehen bestimmter Geschäfte geknüpft. Damit stellen sie die älteste aller Risikoarten dar. Dennoch wurden sie lange Zeit nicht sonderlich beachtet, und Methoden und Modelle im Umgang mit operationellen Risiken sind noch relativ jung und längst nicht so ausgereift wie die für Markt- oder Kreditrisiken. Wegen ihrer speziellen Eigenarten ist eine einfache Übertragung der Modelle für andere Risikoarten auf operationelle Risiken nicht möglich. Daher wurde eine Vielzahl von speziellen Methoden und Modellen zu ihrer Identifizierung, Messung und Bewertung sowie zur Steuerung und Kontrolle entwickelt, seitdem klar wurde, dass operationelle Risiken in Zukunft explizit mit Kapital hinterlegt werden müssen. Auch haben die Banken seither begonnen, Verluste aus operationellen Risiken in Datenbanken zu erfassen.

Operationelle Verluste können zweifach charakterisiert werden. Auf der einen Seite stehen viele Ereignisse, die zu kleinen Verlusten führen, auf der anderen Seite Ereignisse, die zwar äußerst selten auftreten, deren Ausmaß jedoch so gravierend sein kann, dass sie eine Unternehmung in ihrer Existenz gefährden. Von Natur aus liegen für erstere ausreichend Daten vor, um sie über Vergangenheitswerte zu modellieren. Für letztere ist es umgekehrt; die geringe Datengrundlage stellt ein großes Problem in den Modellen und bei ihrer Kalibrierung dar. Diese seltenen, aber hohen Verluste spiegeln gerade das Risiko wieder, da sie die Bank in ihrer Existenz bedrohen können. Im Gegensatz zu den kleinen und häufigen Verlusten, die relativ gut prognostiziert werden können, stellen sie unerwartete Verluste dar. Für die Schätzung hoher Quantile der Verlustverteilungen spielen sie die entscheidende Rolle, da sie das Ende der Verteilung bestimmen.

Das Fehlen von Verlustdaten stellt auch in Zukunft die größte Herausforderung bei der Quantifizierung operationeller Risiken dar. Abhilfe können in Zukunft Datenpooling-Initiativen schaffen, von denen bereits einige die Arbeit aufgenommen haben. Problematisch hierbei ist die Relevanz externer Daten für das jeweilige Institut. Cruz (2002) bezweifelt generell, dass Daten anderer Institute mit unterschiedlichen Prozessen und Kulturen für die Modellierung herangezogen werden können. In jedem Falle bleibt die Frage einer nötigen Anpassung externer Daten. Dabei müssen Faktoren gefunden werden, nach denen Verlusthöhen und -häufigkeiten skaliert werden. Nach Moscadelli (2004) und de Fontnouvelle et al. (2004) müssen vor allem die Verlusthäufigkeiten an das Geschäftsvolumen angepasst werden, während die Verlusthöhenverteilungen zumindest in Gruppen großer, internationaler Banken bzw. kleiner, national tätigen Instituten für einzelne Risikotypen vergleichbar sind.

Die Relevanz historischer Daten ist auch im Falle interner Verlustdaten zu

überprüfen. Eine Bank wird auf Verluste reagieren und versuchen, sie in Zukunft durch Anpassungen der Organisation zu vermeiden oder in ihrem Ausmaß zu verringern. Als Beispiel sei ein Betrugsfall in einer Bank angenommen. Diese wird Maßnahmen ergreifen, so dass der gleiche Fall nicht mehr oder nur mit geringerer Wahrscheinlichkeit erneut auftreten kann.<sup>5</sup> Durch Versicherungen kann Risiko auf Dritte abgewälzt oder gemindert werden. Operationelle Verluste sind stark kontextabhängig im Bezug auf die Organisation und das allgemeine Umfeld. Während Verluste aus Markt- und Kreditrisiken schwach kontextabhängig sind, ist die Relevanz der zur Modellierung und Kalibrierung herangezogenen Daten im Bereich operationeller Verluste ständig sicherzustellen. Die Kontextabhängigkeit stellt auch das größte Problem bei der Validierung der Modelle dar, da sich der Kontext schneller ändern kann, als eine Validierung möglich ist. Das Problem wird dadurch vergrößert, dass das Risiko zu einem Konfidenzintervall von 99,9% geschätzt werden muss. Es müssen also Verluste berücksichtigt werden, die erwartungsgemäß einmal in tausend Jahren auftreten (vgl. Lawrence 2003). Die Kontextabhängigkeit variiert mit unterschiedlichen Risikotypen, die unter operationellen Risiken zusammengefasst sind. So sind Risiken aus Naturkatastrophen kaum kontextabhängig, während schon Risiken aus Terrorangriffen mehr vom Kontext abhängen. Betrug kann als ein Beispiel sehr starker Kontextabhängigkeit gelten, da Möglichkeiten des Betrugs durch Anpassungen der Kontrollumgebung minimiert werden können. Auch sind mehr Betrugsfälle in Zeiten schlechter allgemeiner Konjunktur zu erwarten. Die Kontextabhängigkeit muss daher für unterschiedliche Risikoursachen individuell betrachtet werden. Eine kurze Darstellung verschiedener Risikotypen und der *Wiederholbarkeit* entsprechender Verluste findet sich in Embrechts et al. (2003).

Auch wenn die Verlustdaten für die Zukunft relevant sind, bleibt die Frage, ob durch ergriffene Maßnahmen die Häufigkeit der Ereignisse oder der zugehörige Verlust vermindert werden konnten und angepasst werden müssen. Holmes (2003) weist auf die Problematik hin, das Portfolio operationeller Risiken zu erfassen. Während die möglichen Verluste aus Markt- und Kreditrisiken als bekannt gelten können, gestaltet sich im Bereich des operationellen Risikos die Identifizierung von einzelnen Risiken schwierig. Prozesse können auf Risiken hin analysiert werden, doch eine umfassende Identifizierung von Risiken, die aus Systemen, Menschen oder externen Ereignissen erwachsen, ist nahezu unmöglich. Gerade schwerwiegende Verlustrisiken sind den Banken oft nicht bekannt. Als Beispiel können die Terroranschläge des 11. September 2001 dienen, die von niemandem vorhergesehen wurden. Nur durch historische Verlusterfahrungen, die sicherlich nicht alle sich in Zukunft

---

<sup>5</sup> Da andere Banken wahrscheinlich nicht über die angepassten Kontrollstrukturen verfügen, kann der Verlustfall für sie hingegen von Relevanz sein, weshalb er in Datenpools aufgenommen werden sollte.

ergebenden Risiken abdecken, ist eine Abschätzung möglich.

Wie bereits erwähnt, sind operationelle Risiken nicht an bestimmte Geschäfte gebunden. Daraus ergibt sich die Problematik, quantifizierbare Größen auszumachen, die das Ausmaß beschreiben, in dem eine Bank einem Risiko ausgesetzt ist. Vergleichbare Größen des Kreditrisikos sind unter anderen die Anzahl und die aggregierte Höhe aller Kreditforderungen einer Bank. Offensichtlich steigt das Risiko, je mehr Kredite ausgegeben werden und je höher ihre Summe ausfällt. Im Bereich des operationellen Risikos fällt die Identifizierung solcher Risikoindikatoren nicht leicht. Ein Beispiel ist die durchschnittliche Verweildauer von Mitarbeitern in einer bestimmten Abteilung sein, deren Aufgabe wesentlich von Mitarbeitererfahrung und -wissen abhängt. Je kürzer die Verweildauer, desto größer ist das Risiko in der Abteilung. Für ein Risiko können dabei mehrere Risikoindikatoren Verwendung finden. Zusätzliche Probleme ergeben sich bei der Bewertung der Indikatoren. Im Beispiel ergibt sich die Frage, welches Risiko aus einer bestimmten durchschnittlichen Verweilzeit resultiert. Die Identifizierung und Bewertung der Risikotreiber stellen Probleme dar, welche für viele Risikotypen nur schwer zu lösen ist.

Auch nach der positiven Definition operationeller Risiken im Basel II Akkord besteht weiterhin ein Zuordnungsproblem. Zum einen überschneiden sich die verschiedenen Risikoarten. Denkbar ist ein Kredit, dessen Risiko durch einen Mitarbeiter falsch beurteilt wurde. Ein entstehender Verlust könnte den Kredit- oder den operationellen Risiken zugeordnet werden. Zum anderen sind oft mehrere Ursachen für einen Verlust verantwortlich, z.B. ein Eingabefehler eines Mitarbeiters und ein fehlerhaftes System, das diesen nicht bemerkt. Zusätzlich können sich Verlustereignisse auf verschiedene Geschäftsbereiche auswirken. Eine genaue Abgrenzung ist zur Modellierung unabdingbar, da Doppelzählungen zu einer überhöhten Risikoschätzung führen würden.

Die genannten Eigenschaften verhindern eine einfache Übertragung bestehender Modelle für andere Risikoarten auf operationelle Risiken und stellen Probleme dar, die in den Verfahren und Modellen adressiert werden müssen. Heute, kurz vor Inkrafttreten der neuen Richtlinien, sind zahlreiche Ansätze entwickelt, von denen einige in dieser Arbeit dargestellt werden. Ob die Modelle die Wirklichkeit gut abbilden, und ob die errechneten Kapitalanforderungen adäquat sind, wird erst die Zukunft zeigen. Wichtiger als die genaue Quantifizierung der Risiken ist jedoch die durch die neuen Richtlinien erreichte erhöhte Aufmerksamkeit, die operationellen Risiken entgegengebracht wird (vgl. Currie 2004).

Während von wissenschaftlicher Seite zahlreiche Veröffentlichungen über mögliche Modelle vorliegen, sind nur wenig detaillierte Informationen über tatsächliche Implementierungen in Instituten öffentlich zugänglich. Eine Vielzahl der Arbeiten befasst sich mit auftretenden Teilproblemen und lässt die Umsetzung in der Praxis, die Eingliederung in ein Gesamtmodell, offen. Die

vorliegende Arbeit versucht, die Methoden praxisnah in einem ganzheitlichen Ansatz von Anfang bis Ende, von den Verlustdaten bis zu einer Kapitalanforderung, darzustellen. Auftretende Probleme werden diskutiert und mögliche Lösungen aufgezeigt.

## 1.2 Kalibrierungsprobleme

kalibrieren — auf das richtige Maß bringen<sup>6</sup>

Es ist die Absicht des Ausschusses und liegt im Interesse der Banken, das operationelle Risiko so exakt wie möglich zu messen, um die Steuerung und die Absicherung durch Kapital zu ermöglichen. Das Kalibrierungsproblem teilt sich dabei auf die Aufsichtsbehörden bzw. den Basler Ausschuss und die Banken auf. Für die einfacheren Messansätze im Basler Akkord müssen die Parameter von Seiten der Aufsicht festgelegt werden. Die Parameter gelten für alle Banken gleichermaßen. Operationelle Risiken sind aber vor allem bankinterner Natur (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1998). Es gestaltet sich schwierig die Parameter zu schätzen, so dass dem individuellen Risikoprofil der Banken adäquat Rechnung getragen wird. Ein weiteres Problem bereitet die Datengrundlage, auf der die Schätzung erfolgt. Auf das Problem der Kalibrierung aus Sicht der Aufsicht wird in Kapitel 2.3 näher eingegangen.

Zum anderen können Banken im Rahmen der fortgeschrittenen Messansätze (AMA) die Mindesteigenkapitalanforderungen aus internen Modellen berechnen. Dazu sind gegenüber der Aufsicht quantitative und qualitative Anforderungen an die Modelle zu belegen. Hier besteht das Kalibrierungsproblem für die Banken, die die Parameter für die internen Modelle schätzen müssen. Die Kalibrierung der fortgeschrittenen Ansätze wird in den Modellbeschreibungen in Kapitel 3 erörtert.

## 1.3 Risikomaße und Value-at-Risk

Der Umgang mit Risiken erfordert nach ihrer Identifizierung zunächst ihre Quantifizierung. Erst danach ist eine Steuerung und Kontrolle möglich. Dabei ist ein Risikomaß sinnvoll, das in Geldeinheiten ausgedrückt wird. Dies ermöglicht eine Absicherung durch Kapital und die Einbeziehung in Preiskalkulationen. Ebenfalls können auf diese Weise Preise für Versicherungen beurteilt werden.

Den etablierten Industriestandard zur Messung des Markt- und Kreditrisikos stellt der *Value-At-Risk* (VaR) dar. Prinzipiell bezeichnet er den maximal möglichen Verlust, der zu einem bestimmten Konfidenzniveau  $p$  während

---

<sup>6</sup>Vgl. wissen.de Wörterbuch, <http://www.wissen.de/wde/generator/wissen/ressorts/index?page=1871242.html>, Abruf 17.2.06.

einer Vorhalteperiode entstehen kann. Mit anderen Worten bezeichnet er das  $p$ -Quantil der Verlustverteilung der Periode. Er schließt den erwarteten und unerwarteten Verlust ein. Mathematisch ausgedrückt bestimmt sich der VaR zum Niveau  $p$  als

$$VaR_p = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\} ,$$

hierbei bezeichnet  $F$  die Verlustverteilung.

Vorteile des VaR sind vor allem die Einfachheit und Anschaulichkeit, die ihn leicht kommunizierbar machen. Die Interpretation als das zu hinterlegende Kapital, welches benötigt wird, um die Ruinwahrscheinlichkeit auf  $(1 - p)$  festzusetzen, ist einfach nachzuvollziehen. Auch rechtfertigt diese Interpretation eine Kapitalanforderung in Höhe des VaR, wird seitens der Aufsicht ein Ruin mit der Wahrscheinlichkeit  $(1 - p)$  in Kauf genommen.

Allerdings gibt es auch Nachteile: Artzner et al. (1999) zeigen, dass die Anforderungen an ein kohärentes Risikomaß nicht erfüllt sind. Die Anforderung der Subadditivität wird verletzt. Das heißt, es ist möglich, dass die Summe des Risikos aus zwei einzelnen Positionen geringer ist als das in einem Portfolio zusammengefasste Risiko der zwei Positionen. Die Anforderung der Subadditivität an ein Risikomaß ist im Sinne der Diversifizierung leicht nachvollziehbar. Nur im Falle einer elliptischen Verlustverteilung ist der VaR subadditiv und damit kohärent.<sup>7</sup> Eine ausführlichere Darstellung der Anforderungen wird in Anhang A gegeben.

Ein weiterer Nachteil des VaR ist, dass er keine Informationen über das Ausmaß möglicher Verluste oberhalb des VaR gibt. Er ist damit zu optimistisch, denn er liefert nur das beste Ergebnis im Bereich der größtmöglichen Verluste, d.h. der Verluste, die mit der Ruinwahrscheinlichkeit  $(1 - p)$  eintreten.

Artzner et al. (1999) schlagen daher den Expected-Shortfall (ES) als (kohärentes) Risikomaß vor. Er misst den erwarteten Verlust, vorausgesetzt der VaR wird überschritten.<sup>8</sup> Der ES zum Konfidenzniveau  $p$  ergibt sich demnach nach

$$ES_p = E(X|X > VaR_p) .$$

Man spricht auch vom Conditional-VaR zum Niveau  $p$ . Die Zerlegung

$$ES_p = VaR_p + E(X - VaR_p|X > VaR_p)$$

macht deutlich, dass der ES immer über dem VaR liegt. Der zweite Term berücksichtigt den erwarteten Verlust, wenn der VaR überschritten wird. Daraus ergibt sich für eine Kapitalhinterlegung folgende Interpretation: Das

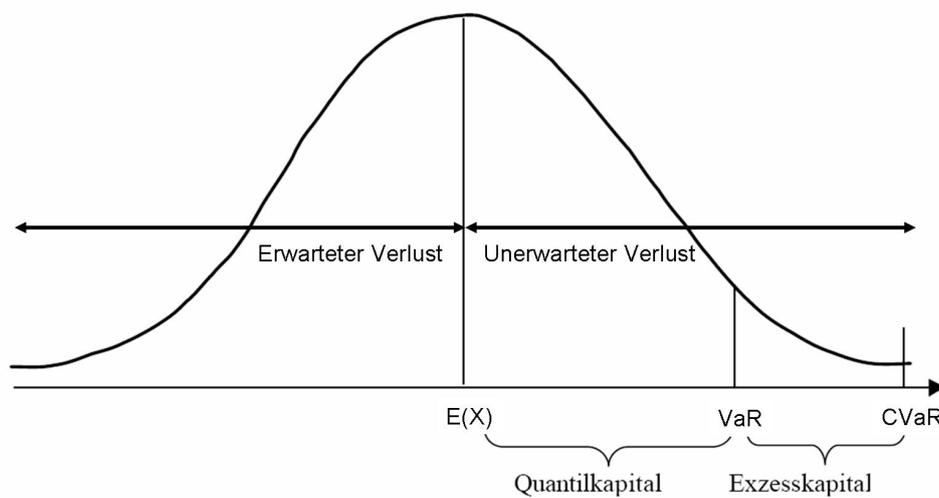
<sup>7</sup>Alle anderen Anforderungen an ein kohärentes Maß, die Translationsinvarianz, die Homogenität und die Monotonie, erfüllt der VaR für jede Verteilung.

<sup>8</sup>Genau genommen ist diese Interpretation nur dann zulässig, wenn eine kontinuierliche Verlustverteilung vorliegt, wovon im Folgenden ausgegangen wird. Für den Fall einer diskreten Verteilung wird auf Albrecht (2003) verwiesen.

notwendige Kapital entspricht dem erwarteten Verlust  $E(X)$ , dem Quantilkapital  $VaR_p - E(X)$  und dem Exzess-Kapital  $E(X - VaR_p | X > VaR_p)$ . Der erste Teil deckt den mittleren Verlust ab, die zweite Komponente die Differenz zum Maximalschaden mit Ruinwahrscheinlichkeit  $(1 - p)$ , und der letzte Teil den mittleren Exzess-Verlust im Falle einer Überschreitung des Maximalschadens (vgl. Albrecht 2003).

Abbildung 1.1 soll die Begriffe verdeutlichen.

Abbildung 1.1: Value-at-Risk und Conditional-Value-at-Risk



Es existiert eine Vielzahl weiterer Risikomaße, die z.T. keine monetäre Interpretation erlauben. Die Verwendung solcher abstrakten Maße ist nur für bestimmte Anwendungen sinnvoll. Werden rudimentäre Anforderungen, z.B. die Monotonie der Risikofunktion, erfüllt, eignet sich das Risikomaß zwar zur Steuerung und Kontrolle der Risiken, eine Ableitung einer Kapitalanforderung gestaltet sich aber problematisch. Abstrakte Risikomaße eignen sich dennoch, um Teile der Modelle zu validieren. Wie in Kapitel 2.3 näher erläutert wird, verifiziert Moscadelli (2004) die Ordnung der Geschäftsfelder nach ihrem Risiko und ihrem jeweiligen Anteil am Gesamtrisiko mit Hilfe eines abstrakten Risikomaßes.

Die vom Basler Ausschuss verwendeten Risikomaße orientieren sich am VaR Konzept. Für operationelle Risiken ist (bei Anwendung der AMA) Eigenkapital zur Deckung des Verlustes mit einem Konfidenzniveau von 99,9% und einer einjährigen Halteperiode vorzuhalten. Es wird also eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0,1% akzeptiert.

## Kapitel 2

# Messmethoden für operationelles Risiko nach Basel II

### 2.1 Zielsetzung

Die zurzeit geltenden Eigenkapitalregelungen für Banken, der Basel I Akkord, stammt aus dem Jahr 1988 und wurde im Laufe der Jahre durch zahlreiche Erweiterungen ergänzt. Nach Basel I sind 8% der risikogewichteten Aktiva durch Eigenkapital zu hinterlegen (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1988). Die wichtigste Ergänzung (Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1996b) enthält Richtlinien zur Behandlung der Marktrisiken, die interne Modelle zur Risikoquantifizierung erlauben. Andere Risiken, operationelle Risiken eingeschlossen, werden in Basel I nicht explizit erfasst. Implizit werden sie über ein Polster in der wenig differenzierten Berechnung der Mindestkapitalanforderung gedeckt (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1999). Wesentliche Kritikpunkte waren, dass die Berechnung das individuelle Risikoprofil einer Bank nur unzureichend abbildet und neue Entwicklungen in Finanzinstrumenten und Methoden der Risikomessung und -steuerung nicht berücksichtigt werden. Daher entschloss sich der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1999 zu einer Neuregelung, um diese Schwächen zu beseitigen. Das Ergebnis liegt mit dem zweiten Basler Akkord vor, der 2004 vom Ausschuss beschlossen wurde und Ende 2006 in Kraft tritt. Während die Regelungen für Marktrisiken unverändert bleiben, gelten für Kreditrisiken neue Ansätze. Operationelle Risiken werden erstmals explizit in die Anforderung einbezogen.

Ziel der Neuregelung war eine Kapitalverordnung, die dem tatsächlichen Risikoprofil der Banken gerecht wird, während die Mindesteigenkapitalanforderungen im Gesamtsystem aufrechterhalten werden sollten (vgl. Deutsche Bundesbank 2004). Durch eine risikosensitivere Gestaltung der Kapi-

talanforderungen für Kreditrisiken und dem damit verbundenen Wegfall des Polsters für andere Risiken ergab sich die Notwendigkeit, die vorher nur implizit berücksichtigten anderen Risiken nun explizit in die Berechnung mit einzubeziehen. Teile dieser Restrisiken, z.B. strategische Risiken oder das Liquiditätsrisiko, sind jedoch nicht ausreichend quantifizierbar, weshalb sich der Ausschuss dazu entschloss, nur operationelle Risiken in die Mindestkapitalanforderung aufzunehmen. Die explizite Einbeziehung wird zusätzlich Entwicklungen gerecht, die das Ausmaß, in dem Banken operationellen Risiken ausgesetzt sind, in den letzten Jahren haben steigen lassen. Hierzu zählen z.B. Outsourcing-Tendenzen oder die verstärkte computergestützte Automatisierung (vgl. Stickelmann 2002).

Zusätzlich soll durch die explizite Einbeziehung ein stärkeres Bewusstsein innerhalb der Banken für operationelle Risiken erreicht werden. Dies wird zusätzlich unterstützt durch erweiterte Offenlegungsstandards gegenüber der Aufsicht und Kapitalgebern. Currie (2004) hält diesen Aspekt für den weit wichtigeren, da durch die erhöhte Kapitalanforderung die Ursachen operationeller Risiken nicht behoben werden, und sie bezweifelt, dass zusätzlich vorzuhaltendes Kapital die Stabilität des Finanzsystems merklich erhöht. Dies ist nur durch den veränderten Umgang mit operationellen Risiken und der Verbesserung der Prozesse und Kontrollstrukturen zu erreichen.

Dem Ausschuss zufolge wird ein solides Finanzsystem durch drei tragende Elemente sichergestellt, die auch als Säulen von Basel II bezeichnet werden. Diesen entsprechend gliedert sich der Akkord in drei Teile. Die erste Säule stellen die Mindestkapitalanforderungen für Markt-, Kredit- und operationelle Risiken dar. Zur Deckung möglicher Verluste muss Eigenkapital in ausreichender Höhe vorgehalten werden.

Die Angemessenheit der Kapitalausstattung und des Risikomanagements muss von einer unabhängigen Aufsichtsbehörde überprüft werden. Regelungen zum aufsichtlichen Überprüfungsverfahren bilden die zweite Säule des Akkords.

In der dritten Säule wird die Marktdisziplin adressiert. Hohe Offenlegungsvorschriften sollen die Kontrolle und Bewertung des Risikomanagements der Banken durch den Markt ermöglichen. Der Ausschuss verspricht sich hiervon weitere Anreize für ein besseres und bewussteres Risikomanagement.

Restrisiken, die nicht innerhalb der ersten Säule, den Mindesteigenkapitalanforderungen, adressiert werden, müssen dennoch in die Risikobetrachtung der Bank einbezogen werden. Qualitative Regelungen dazu finden sich in der zweiten und dritten Säule des Akkords.

Zur Bestimmung der Mindesteigenkapitalanforderung für operationelle Risiken sieht der neue Akkord drei Ansätze mit fortschreitender Komplexität und Risikosensitivität vor. In den beiden ersten Ansätzen wird die Anforderung anhand von Indikatorgrößen berechnet. Der letzte Ansatz erlaubt die Anwendung interner Modelle, solange sie gewisse quantitative und qualitative Anforderungen erfüllen. Es wird kein Modell explizit vorgeschrieben, woraus

eine Flexibilität des Akkords resultiert, die Anwendung zukünftiger Entwicklungen in der Risikomessung ohne langwierige Änderungen des Regelwerks zu ermöglichen.

Die Anwendung der komplexeren Ansätze ist an zunehmende Anforderungen an das Risikomanagement der Bank geknüpft. Den Banken sollen über die gesteigerte Risikosensitivität und den damit geringeren Kapitalanforderungen Anreize gegeben werden, zu einem komplexeren Ansatz zu wechseln. Es ist den Banken nicht erlaubt, von einem fortgeschritteneren Ansatz zu einem einfacheren zurückzukehren, um Eigenkapitalarbitrage zu verhindern. Der Basler Ausschuss spricht von der Kontinuität der Ansätze.

Kritisiert wurde in der Konsultationsphase, dass innerhalb der Ansätze keine Möglichkeit zur Verringerung der Kapitalanforderung durch verbessertes Risikomanagement gegeben wird und somit nur Fortschritte quantitativer Natur belohnt werden (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001). Die Forderung, die Qualität des Risikomanagementrahmens der Banken durch einen Multiplikator in die Kapitalanforderung einzubeziehen, wurde jedoch nicht aufgegriffen.

Weiter besteht nach Zentraler Kreditausschuss (2001) die Möglichkeit von Eigenkapitalarbitrage, wenn der Akkord wie vorgesehen auf vollkonsolidierter Basis angewandt wird. Die Möglichkeit besteht, wenn Bereiche in die Kapitalanforderung einbezogen werden, die unter anderen Eigentümerverhältnissen nicht oder anders reguliert sind. Im verabschiedeten Akkord wird dem nur durch die Möglichkeit von Ausnahmen begegnet, die die Regulierungsbehörde gestatten kann.

Die Methoden der verschiedenen Ansätze und die Anforderungen an ihre Anwendung werden in den nächsten Abschnitten dargestellt. Im Anschluss daran wird die Problematik der Kalibrierung aufgegriffen.

## **2.2 Methoden**

### **2.2.1 Basisindikatoransatz**

Den einfachsten Ansatz zur Ermittlung der Mindesteigenkapitalanforderung für operationelles Risiko stellt der Basisindikatoransatz (BIA) dar. Er berechnet das vorzuhaltende Eigenkapital anhand einer einzigen Indikatorgröße, dem Bruttoertrag. Dieser ist definiert als Nettozinsertrag zuzüglich des zinsunabhängigen Ertrags (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2004). Durch Multiplikation des Durchschnitts der letzten drei Bruttoerträge mit einem aufsichtlich vorgegebenen Faktor, dem Alpha-Faktor, erhält man die Mindesteigenkapitalanforderung. Dabei sollen nur die positiven Bruttoerträge der letzten drei Jahre einbezogen werden. Formal ausgedrückt ergibt sich

das Mindesteigenkapital für operationelles Risiko  $K_{BIA}^t$  im Jahre  $t$  zu

$$K_{BIA}^t = \alpha \cdot \frac{\sum_{i=1}^3 GI^{t-i} \cdot 1_{\{GI^{t-i}>0\}}}{\sum_{i=1}^3 1_{\{GI^{t-i}>0\}}} .$$

$GI^{t-i}$  bezeichnet dabei den Bruttoertrag des Jahres  $(t-i)$ . Der Alpha-Faktor wurde auf  $\alpha = 15\%$  festgesetzt.<sup>1</sup>

Es wird ein proportionaler Zusammenhang zwischen dem operationellen Risiko und dem Bruttoertrag unterstellt. Gerade die Verwendung des Bruttoertrags als Indikatorgröße wurde im Rahmen der Konsultationsphase stark kritisiert. Der Zentrale Kreditausschuss — ein Zusammenschluss der fünf Spitzenverbände der deutschen Kreditwirtschaft — sieht keinen Zusammenhang zwischen operationellen Verlusten und dem Ertrag. Darüber hinaus würden durch die Verwendung des Ertrags keine bzw. falsche Steuerungsanreize gesetzt. Ein besseres Risikomanagement, das zu geringeren Verlusten führt, bewirkt eine Steigerung des Ertrags und gleichzeitig eine Erhöhung der Kapitalanforderung (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001).

Die Intention des Ausschusses, dem Problem dadurch zu begegnen, den Bruttoertrag vor Abzug operationeller Verluste zu ermitteln, widersprach der gewünschten Einfachheit des Ansatzes (vgl. Gramlich und Gramlich 2002). Dies hätte die Identifizierung und Quantifizierung der operationellen Verluste vorausgesetzt. Der verabschiedete Akkord versucht dem gerecht zu werden, indem der Bruttoertrag vor Wertberichtigungen, ohne Abzug für betriebliche Aufwändungen, z.B. auch für externe Dienstleistungen, und Gewinne und Verluste im Anlagenbuch bestimmt wird, und sporadische und außerordentliche Erträge sowie Einkünfte aus Versicherungsgeschäften nicht eingeschlossen werden (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2004). Im Gegensatz zur Meinung des Zentralen Kreditausschusses ist der so definierte Bruttoertrag nach empirischen Untersuchungen des Basler Ausschusses mit den operationellen Verlusten positiv korreliert (vgl. Deutsche Bundesbank 2004). Weiter spricht für den Bruttoertrag, dass er leicht aus der Gewinn- und Verlustrechnung zu ermitteln ist, während sich in einigen Banken Probleme bei der Ermittlung alternativer Indikatoren ergaben (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2003a).

Als problematisch wird weiterhin angesehen, dass in verschiedenen Ländern zum Teil unterschiedliche Rechnungslegungsvorschriften gelten (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2001). Dieses Problem ist auch im verabschiedeten Akkord nicht gelöst; der Nettozinsenertrag und das zinsunabhängige Ergebnis sind durch die nationale Bankenaufsicht oder nationale Rechnungslegungsstandards zu definieren (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2004).

Der Bruttoertrag schließt Erträge aus Finanzgeschäften ein. Diese sind starken Schwankungen ausgesetzt, die sich auf den Bruttoertrag übertragen. Als

<sup>1</sup>In Abschnitt 2.3 wird auf die Kalibrierung des Alpha-Faktors näher eingegangen.

Plangröße für die Ermittlung der Kapitalanforderung einer Folgeperiode erscheint der Bruttoertrag daher fragwürdig und wurde auch deshalb vielfach kritisiert (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001). Um Schwankungen in der Kapitalanforderung abzufedern, wurde im verabschiedeten Akkord der Durchschnitt der letzten drei Jahre als Indikatorgröße gewählt.

Der BIA ist für Banken gedacht, die nur in geringem Ausmaß operationellen Risiken ausgesetzt sind und für die der Aufwand eines besseren Ansatzes aus Kostenaspekten nicht gerechtfertigt wäre. Von international tätigen Banken wird erwartet, dass sie einen der fortgeschritteneren Ansätze anwenden. Die Einfachheit hat ihren Preis darin, dass der Bruttoertrag nur eine grobe Schätzung des operationellen Risikos liefern kann und das individuelle Risikoprofil der Banken weitgehend unberücksichtigt bleibt. Die Festsetzung eines branchenweit gültigen Alpha-Faktors ist problematisch, da gerade das operationelle Risiko von Natur aus stark von dem jeweiligen Institut abhängt. Abgeschlossene Versicherungen werden im BIA nicht berücksichtigt. Kritiker fordern eine Einbindung, da ansonsten der Anreiz entstünde, Versicherungen nicht abzuschließen (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001). Jedoch würde die Berücksichtigung der angestrebten Einfachheit des Ansatzes widersprechen. Durch die indirekte Berücksichtigung über die Kalibrierung des Alpha-Faktors wird dennoch eine angemessene Kapitalanforderung erreicht (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2001).

Der Ausschuss merkt an, dass eine Berechnung über den Bruttoertrag das Risiko unterschätzen kann. Dies ist gerade bei Banken mit geringen Margen oder geringer Ertragskraft der Fall (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2004). Aufgabe der prüfenden Aufsicht ist, sicherzustellen, dass die Eigenkapitalanforderung den möglichen Verlusten aus operationellen Risiken gerecht wird.

**Anforderungen:** Der BIA stellt das Einstiegsverfahren dar und ist somit an keine speziellen Anforderungen geknüpft. Dennoch sollten die vom Ausschuss veröffentlichten Leitlinien zum Management operationeller Risiken (Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2003b) Beachtung finden.

### 2.2.2 Standardansatz

Im Standardansatz (STA) werden acht Geschäftsbereiche unterschieden, in denen wiederum der Bruttoertrag als Indikator für das operationelle Risiko herangezogen wird.<sup>2</sup> Es wird also nicht auf Ebene der Bank, sondern in den einzelnen Geschäftsbereichen eine Proportionalität unterstellt. Die Geschäftsbereiche sind in Tabelle 2.1 aufgeführt.

---

<sup>2</sup>Eine Ausnahme ergibt sich durch den Alternativen Standardansatz (ASA), der nach Genehmigung der Aufsicht Banken erlaubt, im Retail- und Firmenkundengeschäft jeweils die Höhe der Darlehen und Kredite (mit 0,035 gewichtet) als Indikator zu verwenden. Die Berechnungsweise gleich ansonsten der des STA.

Die Mindestkapitalanforderung eines Jahres für den jeweiligen Geschäftsbereich errechnet sich wie im BIA durch Multiplikation des Bruttoertrags mit einem von der Aufsicht vorgegebenen Faktor für den Geschäftsbereich, dem Beta-Faktor. Die Kapitalanforderung für das gesamte Institut errechnet sich als Durchschnitt über die letzten drei Jahre der einfachen Summe der für die Geschäftsbereiche ermittelten Werte. Zu beachten ist dabei, dass negative Ergebnisse (aufgrund negativer Erträge) eines Geschäftsbereichs mit positiven Ergebnissen in anderen Bereichen innerhalb eines Jahres verrechnet werden dürfen. Dies soll neben der risikosensitiveren Berechnung des Mindesteigenkapitals den Banken einen Anreiz geben, in den fortgeschritteneren Ansatz zu wechseln (vgl. McNeil et al. 2005). Jedoch darf für ein Jahr die Summe der Ergebnisse in den Geschäftsbereichen nicht negativ sein. Im Gegensatz zum BIA gehen im STA die Ergebnisse negativer Ergebnisse eines Jahres in den Nenner mit ein. Formal errechnet sich die Mindesteigenkapitalanforderung  $K_{STA}^t$  im Jahr  $t$  zu

$$K_{STA}^t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \max\left[\left(\sum_{j=1}^8 GI_j^{t-i} \cdot \beta_j\right), 0\right].$$

$GI_j^{t-i}$  bezeichnet den (evtl. negativen) Bruttoertrag des Geschäftsbereichs  $j$  im Jahr  $(t - i)$ .  $\beta_j$  bezeichnet den Beta-Faktor des Geschäftsbereichs. Die einzelnen Werte der Beta-Faktoren sind Tabelle 2.1 zu entnehmen.

Tabelle 2.1: Geschäftsbereiche und zugehörige Beta-Faktoren im STA

<b>Geschäftsbereich</b>	<b>Beta-Faktor</b>
Unternehmensfinanzierung/-beratung (Corporate Finance)	18%
Handel (Trading & Sales)	18%
Retail-Geschäft (Retail Banking)	12%
Firmenkundengeschäft (Commercial Banking)	15%
Zahlungsverkehr und Wertpapierabwicklung (Payment & Settlement)	18%
Depot- und Treuhandgeschäfte (Agency Services)	15%
Vermögensverwaltung (Asset Management)	12%
Wertpapierprovisionsgeschäft (Retail Brokerage)	12%

Quelle: Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004)

Beabsichtigt ist, durch die Unterteilung in Geschäftsbereiche mit unterschiedlichen Beta-Faktoren eine bessere Risikosensitivität zu erreichen. Dafür spricht das intuitive Verständnis, dass die Geschäftsbereiche in unterschiedlichem Maß Risiken ausgesetzt sind. Allerdings kann in Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2001) kein signifikanter Unterschied zwischen den Beta-Faktoren

der unterschiedlichen Bereiche festgestellt werden, was auf die kleine Anzahl an der Erhebung teilnehmender Institute und die unterschiedliche Berechnungsweise des ökonomischen Kapitals zurückgeführt wird (siehe auch Abschnitt 2.3).

Die Aufteilung in Bereiche entspricht weitgehend den Vorschlägen aus der Industrie. Die Banken sollten daher in der Lage sein, ihre Tätigkeiten entsprechend zuzuordnen (vgl. Stickelmann 2002). Allerdings kritisieren Gramlich und Gramlich (2002), dass spezielle Geschäftstätigkeiten wie das Bauspargeschäft der Landesbanken nicht getrennt berücksichtigt werden und ihrem speziellen Risikoprofil nicht Rechnung getragen wird.

Moscadelli (2004) zeigt, dass für eine durchschnittliche international tätige Bank der beabsichtigte Anreiz besteht, vom BIA zum STA zu wechseln, da die Kapitalanforderung durch den Wechsel sinkt. Die Angaben in Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2003a) scheinen dies zu bestätigen. Dieser Anreiz kann aber unter Umständen nicht bestehen, wenn eine Bank nur in einigen Geschäftsfeldern aktiv ist. Auf diese Problematik wird in Abschnitt 2.3 näher eingegangen.

Im ersten Konsultationspapier wurden für die unterschiedlichen Bereiche statt des Bruttoertrags andere Indikatoren in Erwägung gezogen. Diese wurden jedoch mit der zweiten Auswirkungsstudie fallen gelassen. Offensichtlich war keiner der angedachten Indikatoren dem Bruttoertrag überlegen (vgl. Stickelmann 2002). Vor allem die einfache Ermittlung aus der Gewinn- und Verlustrechnung spricht für den Bruttoertrag. In Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2003a) wurden Probleme der Banken festgestellt, andere Indikatorgrößen nach Geschäftsbereichen getrennt zu ermitteln. Wie im Falle des BIA wurde die Verwendung des Ertrags aus denselben Gründen vielfach kritisiert (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001).

Auch in der Diskussion des STA wurde bemängelt, dass die Absicherung gegen Verluste durch Versicherungen keine Berücksichtigung findet. Dadurch entfielen der Anreiz Versicherungen abzuschließen, was im Gegensatz zum Ziel der Erhöhung der Stabilität des Finanzsystems stehe (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001). Die Gefahr einer überhöhten Kapitalanforderung besteht nach Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2001) jedoch nicht, da Versicherungen in der Kalibrierung ausreichend berücksichtigt wurden. Die direkte Einbeziehung würde dagegen die Komplexität des STA übersteigen.

**Anforderungen:** Im Gegensatz zum BIA werden an die Anwendung des STA konkrete Zulassungsanforderungen gestellt. Diese können in Anforderungen an ein effektives Risikomanagement und eine effektive Risikokontrolle und Anforderungen an die Bewertung und Validierung unterteilt werden (vgl. Stickelmann 2002). Im Folgenden werden die Anforderungen nach Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004) dargestellt.

Es muss eine Risikomanagement-Einheit geben, die Grundsätze und Verfah-

ren zum Risikomanagement und zur Risikokontrolle entwickelt. Dazu gehören Strategien zur Identifizierung, Messung, Bewertung und Steuerung von operationellen Risiken. Weiter ist sie für die Entwicklung und Umsetzung von Bewertungsmethoden und einem Berichtssystem verantwortlich. Das Berichtssystem soll die in den Geschäftsbereichen Verantwortlichen, die Geschäftsleitung und das oberste Verwaltungsorgan regelmäßig über Risiken und entstandene Verluste informieren.

Operationelle Verluste und andere relevante Daten, z.B. Faktoren des Geschäftsumfelds, sind systematisch und Geschäftsfeldern zugeordnet zu sammeln. Diese Daten müssen in das Berichtssystem und die Risikoanalyse einbezogen werden. Die Datenerhebung führt zusätzlich auf die fortgeschrittenen Ansätze hin, für die eine Datengrundlage von mindestens drei Jahren vorausgesetzt wird. Klare Grundsätze zur Zuordnung von Erträgen zu den im Akkord definierten Geschäftsfeldern müssen entwickelt und dokumentiert werden. Sie sind regelmäßig zu prüfen und auf Änderungen und neue Tätigkeiten hin anzupassen.

Ferner sollen Anreize für einzelne Abteilungen geschaffen werden, das Management operationeller Risiken zu verbessern. Das gesamte Risikomanagement und -kontrollsystem muss gut dokumentiert und seine Einhaltung gewährleistet werden. Auch ist in den Geschäftsbereichen für ausreichende Ressourcen für den Umgang mit operationellen Risiken zu sorgen.

Das Bewertungs- und das Risikomanagementsystem sind zu validieren und regelmäßig durch unabhängige Stellen zu überprüfen. Diese müssen über entsprechende Ressourcen verfügen. Das oberste Verwaltungsorgan muss aktiv in die Überwachung des Managementsystems einbezogen werden. Darüber hinaus sind die Verfahren und auch ihre Validierung regelmäßig durch externe Prüfer oder die Bankenaufsicht zu prüfen.

Der Zentrale Kreditausschuss kritisiert die Anforderungen, da sie zur Berechnung der Kapitalanforderung nicht notwendig und zum Teil nur im Hinblick auf die fortgeschrittenen Ansätze gerechtfertigt sind (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001). Die Qualität des Risikomanagementrahmens der Bank sollte daher durch einen Multiplikator in der Kapitalanforderung berücksichtigt werden.

### **2.2.3 Fortgeschrittene Messansätze**

In den fortgeschrittenen Messansätzen (AMA) wird es den Banken erlaubt, die Eigenkapitalanforderung durch interne Modelle zu berechnen. Diese müssen gewissen qualitativen und quantitativen Anforderungen entsprechen, die im nächsten Abschnitt weiter ausgeführt werden. Die Aufsicht muss der Anwendung nach eingehender Überprüfung der Modelle zustimmen.

Welche Modelle im Rahmen der AMA Anwendung finden dürfen, wird im Akkord nicht explizit vorgeschrieben. Dies birgt eine wünschenswerte Flexibilität, durch die zukünftige Entwicklungen nicht durch regulatorische Rah-

menbedingungen beeinträchtigt werden. Modelle und Verfahren können von der Aufsicht genehmigt werden, ohne dass aufwändige Änderungen des Regelwerks nötig sind. Verschiedenste Modellarten können Anwendung finden, solange die Anforderungen erfüllt werden. Zu nennen sind vor allem Verlustverteilungsansätze (LDA), die Verlustverteilungen aus historischen Daten schätzen und über diese Risikomaße bestimmen. LDA-Ansätze werden in Kapitel 3.1 ausführlich dargestellt. Andere Ansätze sind z.B. Scorecard-Modelle oder Indikatoransätze. Alternative Ansätze werden in den Kapiteln 3.3 und 3.4 besprochen.

In der Phase der Zulassung ist zunächst eine Parallelrechnung von einem Jahr vorgesehen, in der die Eigenkapitalanforderung nach den Maßgaben des ersten Basler Akkords berechnet wird und diese als Maßstab für die Bewertung der Ergebnisse der AMA dient. Erst nach dieser Phase darf die Berechnung der Kapitalanforderung auf den AMA basieren, die Zulassung durch die Aufsicht vorausgesetzt. In der Konsultationsphase war zunächst eine Untergrenze für die nach den AMA berechneten Kapitalanforderungen vorgesehen, die sich an der Kapitalanforderung nach dem STA orientieren sollte. Der verabschiedete Akkord setzt dagegen bei Anwendung der fortgeschrittenen Ansätze<sup>3</sup> für die ersten zwei Jahre eine Untergrenze nicht für die Kapitalanforderung aus operationellen Risiken, sondern für die gesamte Eigenkapitalanforderung aus Markt-, Kredit- und operationellen Risiken. Diese errechnen sich zu 90% bzw. 80% der Kapitalanforderung nach Basel I. Der Ausschuss behält sich vor, Untergrenzen über das Jahr 2009 hinaus vorzugeben, sollte er dies für erforderlich ansehen.

Untergrenzen der Kapitalanforderung können von den Aufsichtsbehörden für einzelne Banken erlassen werden, wenn diese erstmalig fortgeschrittene Ansätze anwenden. Diese können sich an anderen Maßgaben als der Kapitalanforderung des alten Akkords orientieren.

Den Banken ist es erlaubt, die AMA schrittweise in einzelnen Geschäftsbereichen einzuführen. Es muss dabei aber ein wesentlicher Teil der operationellen Risiken von den AMA abgedeckt werden. Die partielle Anwendung ist auf Bereiche beschränkt, in denen die Anforderungen an die AMA erfüllt sind. Außerdem muss der Aufsicht ein Zeitplan zur Umstellung der anderen Geschäftsbereiche vorgelegt werden. Eine dauerhafte partielle Anwendung ist nur in Ausnahmefällen zulässig.

**Anforderungen:** Für die Anwendung der AMA müssen zusätzlich zu den Anforderungen des STA weitere qualitative und quantitative Kriterien erfüllt werden. Vor allem muss das interne Modell erwartete und unerwartete Verluste angemessen schätzen und dabei interne und externe Verlustdaten, Szenarioanalysen und Faktoren berücksichtigen, die das Geschäftsumfeld

---

<sup>3</sup>Die Untergrenze gilt für Banken, die die AMA für operationelle Risiken und / oder den auf internen Ratings basierenden Ansatz (IRB) für Kreditrisiken anwenden.

und Kontrollsystem der Bank widerspiegeln. Weiter muss das Messsystem auch intern in der Allokation des ökonomischen Kapitals Verwendung finden und Anreize zur Verbesserung des Risikomanagements schaffen. Im Folgenden werden die Anforderungen gemäß Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004) dargestellt.

Es wird ebenfalls eine Risikomanagement-Einheit gefordert, deren Unabhängigkeit für die AMA explizit erforderlich ist. Sie ist wie im STA für die Entwicklung und Umsetzung der Grundsätze und Verfahren zum Risikomanagement und zur Risikokontrolle und von Strategien zur Identifizierung, Messung, Bewertung und Steuerung von operationellen Risiken verantwortlich. Weiter ist ein Berichtssystem zu entwickeln und umzusetzen. Die Einheit ist auch für die Entwicklung und Umsetzung der bankinternen Messmethoden für das operationelle Risiko zuständig.

Bei der Prüfung durch externe Prüfer oder die Bankaufsicht müssen die internen Validierungsansätze und die Prozesse des Risikosystems berücksichtigt werden. Die Spezifikationen und Parameter des Systems sind der Prüfung zugänglich zu machen.

Zu den quantitativen Anforderungen gehört insbesondere, dass der verfolgte Ansatz seltene, aber schwerwiegende Ereignisse im Endbereich der Verlustverteilung erfasst. Die Kapitalanforderung ist für ein Jahr und ein Konfidenzniveau von 99,9% zu berechnen. Dabei sind erwartete und unerwartete Verluste zu berücksichtigen. Kann die Bank nachweisen, dass sie einen Teil des erwarteten Verlustes angemessen in ihren Geschäftspraktiken, d.h. vor allem bei der Preiskalkulation, berücksichtigt, muss dieser Teil nicht mit Kapital hinterlegt werden. Dazu muss die Aufsicht von der Berechnungsweise des erwarteten Verlustes überzeugt werden. Werden zukünftige Erträge zur Abdeckung des erwarteten Verlustes verwendet, muss dargestellt werden, dass diese Erträge mit ausreichender Wahrscheinlichkeit eintreten (vgl. Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht 2005a).

Die dem Ansatz zugrunde liegende Definition operationeller Risiken muss mit der von Basel II vereinbar sein. Das heißt nicht, dass die Definition exakt der des Ausschusses gleichen muss. Sie muss aber die gleichen Risiken umfassen und Verluste müssen den im Akkord genannten Ursachen zugeordnet werden können. Zum Beispiel differenziert die Definition der Deutschen Bank das operationelle Risiko ausgehend von Menschen und Prozessen stärker als die Definition des Ausschusses (vgl. Deutsche Bank 2004).

Bei der Aggregation von Risikomessgrößen verschiedener Geschäftsbereiche oder Ursachen können Korrelationen berücksichtigt werden, wenn die Bank sicherstellen kann, dass zur Ermittlung der Korrelationen angemessene quantitative und qualitative Verfahren verwendet werden. Insbesondere muss auch die Unsicherheit der Schätzung in Extremsituationen berücksichtigt und durch Stress-Tests validiert werden. In anderen Fällen sind die einzelnen Kapitalanforderungen einfach zu addieren (vgl. McNeil et al. 2005).

Weiter muss das Messsystem der Bank hinreichend detailliert und granular

sein, um Risikotreiber zu identifizieren. Diese Anforderung ist für die Datenerhebung, das Berichtswesen und die Festlegung der Ebenen, auf der die Risiken quantifiziert werden, von entscheidender Bedeutung.

Der Ansatz muss die vier Elemente, interne und externe Daten, Szenarioanalysen und Faktoren des Geschäftsumfeldes und des Kontrollsystems, einbeziehen und entsprechend der Umstände gewichten. In Situationen, in denen wenige Verlustdaten vorliegen, werden die Geschäftsumfeld- und Kontrollfaktoren sowie Expertenschätzungen eine große Rolle spielen. Liegen ausreichend Daten vor, kommt ihnen weniger Bedeutung zu. Doppelzählungen von Verlusten sind zu vermeiden. Zum Beispiel können externe Daten zur Szenarioanalyse herangezogen werden, sie sollten dann aber nicht mit deren Ergebnissen vermischt in eine Schätzung der Verlustverteilung eingehen.

Die Datengrundlage von internen Verlusten soll mindestens fünf Jahre betragen. Bei der erstmaligen Anwendung der AMA, die Phase der Parallelrechnung mitgerechnet, sind drei Jahre zulässig. Zur Einbeziehung sind Verfahren zu entwickeln und zu dokumentieren, die die Relevanz der Daten beurteilen. Historische Verlustdaten, denen eine andere als die aktuelle Geschäftstätigkeit oder Kontrollumgebung oder ein anderes Geschäftsumfeld zugrundeliegen, sollen weniger gewichtet eingehen und eventuell angepasst werden.

Die Daten müssen so erfasst werden, dass sie den im Akkord vorgegebenen Ursachen und Geschäftsfeldern zuzuordnen sind. Die Methodik der Abgrenzung muss sorgfältig dokumentiert werden. Die Banken werden angehalten, eine Bagatellgrenze der Höhe der zu erfassenden Verluste festzusetzen. Hier gibt der Ausschuss als Orientierungsgröße einen Bruttoverlust<sup>4</sup> von 10.000 Euro vor. In verschiedenen Geschäftsbereichen können unterschiedliche Grenzen gesetzt werden. Bei der Festsetzung muss sichergestellt werden, dass alle nicht erfassten Verluste keinen wesentlichen Einfluss auf die Risikoschätzung haben.

Der Umfang- und Detaillierungsgrad der erfassten Daten soll sich an der Größe des Verlustes orientieren. Mindestens sind neben Verlusthöhe der Zeitpunkt des Ereignisses, eventuelle Minderungen des Verlustes und eine Beschreibung der Ursachen zu erfassen. Die Erfassungsmethodik muss klären, wie Verluste in zentralen Bereichen zu erfassen sind. Dies beinhaltet die Zuordnung dieser Verluste in die vorgegebenen Verlustkategorien. Operationelle Verluste, die im Zusammenhang mit Kreditrisiken stehen, werden in der Kapitalanforderung für Kreditrisiken berücksichtigt und erhalten daher in der Berechnung des operationellen Risikos keinen Eingang. Trotzdem müssen sie in der Datenbank für operationelle Risiken erfasst und gesondert gekennzeichnet werden. Operationelle Verluste, die mit Marktrisiken zusammenhängen, sind in die Modelle des operationellen Risikos mit einzubeziehen. Die Banken müssen ebenfalls externe Daten nutzen. Diese können aus öffent-

---

<sup>4</sup>Als Bruttoverlust wird der Verlust vor Abzug eventueller Minderungen durch Versicherungen oder andere Rückerstattungen bezeichnet.

lich zugänglichen Quellen oder aus Datenpooling-Initiativen stammen. Die Einbeziehung soll vor allem das Problem weniger oder nicht vorhandener Daten über seltene Ereignisse mit hohem Verlustpotential mindern. Es müssen klare Methoden entwickelt werden, wann externe Daten heranzuziehen sind und in welcher Weise die Verarbeitung erfolgen soll. Zum Beispiel könnten die Daten als Grundlage von Szenarioanalysen oder einbezogen oder in einem Verlustverteilungsansatz mit den internen Daten kombiniert werden. Ebenfalls muss geklärt werden, wie Datenskalierungen und qualitative Anpassungen zu erfolgen haben und von wem sie vorgenommen werden dürfen. Die Verfahren müssen regelmäßig, auch von unabhängiger Stelle, überprüft werden.

Durch Szenarioanalysen sind Expertenschätzungen über hohe Verluste in das Modell einzubeziehen. Der Akkord hebt besonders die Bedeutung von Szenarien für die Überprüfung der Korrelationsannahmen in Extremsituationen hervor. Alternativ können Expertenschätzungen über die Verlustverteilung herangezogen werden. Im Laufe der Zeit sollen die Schätzungen mit Hilfe von tatsächlichen Verlustdaten validiert und angepasst werden.

Faktoren des Geschäftsumfelds und des Kontrollsystems, die als Risikotreiber identifiziert werden, müssen ebenfalls in das Modell einfließen. Die Auswirkungen auf die Risikoschätzung und die Gewichtung der Faktoren müssen dokumentiert und von unabhängiger Stelle in der Bank sowie von der Bankaufsicht überprüft werden. Der Ausschuss beabsichtigt, die Risikoschätzungen durch die Geschäftsumfeld- und Kontrollfaktoren zukunftsorientierter und Änderungen frühzeitig erkennbar zu machen. Die Faktoren sollen dazu beitragen, z.B. Risikominderungen durch verbesserte Kontrollen oder Steigerungen durch erhöhte Komplexität zu erfassen. Durch den Vergleich mit tatsächlich eingetretenen Verlusten, externen Daten und durchgeführten Anpassungen soll die Einbindung der Indikatoren im Zeitverlauf validiert werden.

Im Rahmen der AMA dürfen Banken Versicherungen zur Risikominderung in die Kapitalanforderung einbeziehen. Die Minderung ist auf maximal 20% der Kapitalanforderung beschränkt und an Anforderungen an den Versicherer geknüpft. Vor allem muss die Versicherung von einer Drittpartei gewährt werden, so dass ein echter Risikotransfer stattfindet. Zahlungsunsicherheiten, z.B. aus Zahlungsunfähigkeit des Versicherers oder aufgrund verschiedener Auslegungen der Policen, sind bei der Einbeziehung zu berücksichtigen. Weitere Anforderungen an die Ausgestaltung der Policen werden in Abschnitt 3.1.8 weiter ausgeführt. Die Einschränkung der Minderung auf 20% wird von Lawrence (2003) kritisiert, da sie den Anreiz mindere, Versicherungen abzuschließen. Die Grenze soll nach Ansicht des Ausschusses ein Polster gegen verzögerte Auszahlungen und rechtliche Streitigkeiten über den Versicherungsfall schaffen. Dies steht im Widerspruch zu den Anforderungen, die die Erfassung solcher Probleme im Modell vorschreiben.

## 2.3 Kalibrierung

Im Folgenden wird die Kalibrierung des Basisindikatoransatzes (BIA) und des Standardansatzes (STA), d.h. die Festsetzung des Alpha-Faktors bzw. der Beta-Faktoren seitens des Basler Ausschusses behandelt. Die Kalibrierung der Modelle im Rahmen der fortgeschrittenen Ansätze (AMA) obliegt den Banken und ist von der Aufsicht lediglich zu prüfen. Da die Kalibrierung der AMA einen wesentlichen Bestandteil der Modellentwicklung und Anwendung ausmacht, wird sie direkt in den jeweiligen Modellbeschreibungen in Kapitel 3 erörtert.

Bei der Kalibrierung wurde vom Basler Ausschuss das Ziel verfolgt, die Mindesteigenkapitalanforderung aller Risikoarten im Gesamtsystem im Wesentlichen unverändert zu lassen (vgl. Deutsche Bundesbank 2004). Da die Regelungen zu Marktrisiken in Basel II unverändert gelten, wird somit ein Kompensationsansatz verfolgt, in dem die Einsparung der risikosensitiveren Kapitalanforderung für Kreditrisiken für operationelle Risiken vorgehalten werden sollen. Dies folgt zum einen der Annahme, dass operationelle Risiken bisher implizit durch die wenig differenzierte Berechnung der Kapitalanforderung abgedeckt wurden. Zum anderen sichert sich der Ausschuss gegen eine unverhältnismäßige Absenkung der Kapitalanforderung ab. Diese Absicherung wird von Kritikern als Unsicherheit gegenüber den entwickelten Ansätzen und den zugrunde liegenden Annahmen verstanden (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001).

Der Kompensationsansatz verhindert gleichzeitig einen starken Anstieg der Kapitalanforderung im Gesamtsystem. Dadurch wird die von Currie (2004) befürchtete Kreditknappheit aufgrund eines starken Anstiegs der Kreditfinanzierungskosten der Banken durch die erhöhte Kapitalanforderung aus operationellen Risiken verhindert. Anzumerken ist, dass die makroökonomische Betrachtung eine erhöhte Anforderung individueller Banken nicht ausschließt. Die vielfach befürchtete Verschlechterung des Kreditangebots für kleine und mittelständische Unternehmen wird hier nicht erörtert, da sie ihren Grund in den neuen Regelungen für Kreditrisiken hat.

Ein weiteres Ziel der Kalibrierung ist die vorgesehene Kontinuität der Ansätze. Eine geringere Kapitalanforderung im STA soll den Banken den Anreiz geben, den risikosensitiveren Ansatz zu implementieren und ihr Risikomanagement den Anforderungen entsprechend zu verbessern.

Die Kapitalanforderung für operationelle Risiken soll nach Ansicht des Ausschusses sowohl erwartete als auch unerwartete Verluste abdecken. Die Einbeziehung erwarteter Verluste wurde vielfach kritisiert, da sie in der Preisbildung von den Banken berücksichtigt werden müssen (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001). Erwartete Verluste stellen genau genommen kein Risiko dar, sondern nur die mehr oder weniger starke mögliche Abweichung von der Erwartung. Allerdings geben die Ergebnisse in Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2003a) dem Ausschuss Recht, da nur ein Drittel der teilnehmenden

Banken erwartete Verluste aus operationellen Risiken schätzen und weniger als die Hälfte davon die Ergebnisse in Preisen oder Reserven berücksichtigen. Zur Kalibrierung wurde gemäß dem Kompensationsansatz ein *top-down*-Ansatz gewählt, der auf einer zuvor bestimmten Höhe der Kapitalanforderung aufbaut. Ursprünglich sollten die Ergebnisse durch einen *bottom-up*-Ansatz validiert werden, der in den Auswirkungsstudien gesammelte Verlustdaten einer repräsentativen Gruppe von Banken nutzen sollte. Die Validierung war nach Ansicht des Ausschusses jedoch nicht möglich, da die Anzahl der teilnehmenden Banken zu klein und die Repräsentativität nicht gesichert war. Zusätzlich führten verschiedene Erhebungsverfahren der Banken und unterschiedliche Interpretationen der geforderten Daten zu Problemen bei der Zusammenführung (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2002, 2003a). Auch konnte nicht sichergestellt werden, dass seltene hohe Verluste durch die über ein kurzes Zeitfenster erhobenen Daten ausreichend erfasst wurden. Moscadelli (2004) verwendet die erhobenen Daten dennoch für einen *bottom-up*-Ansatz, der die Gewichtung der Geschäftsfelder nach ihrem Risiko und die festgesetzten Faktoren als angemessen erscheinen lässt.

Die Kapitalanforderung für operationelle Risiken, die der Kalibrierung zugrunde liegt, wurde mit 12% der Kapitalanforderung nach Basel I festgelegt. Dies entspricht der Größenordnung des Medians des Verhältnisses von dem für operationelles Risiko gehaltenen ökonomischen Eigenkapital zur Mindesteigenkapitalanforderung nach Basel I in den Auswirkungsstudien. Die zunächst beabsichtigten 20% wurden vielfach als überhöht kritisiert und fallengelassen. Zusätzlich sollte mit der Verminderung der Tatsache Rechnung getragen werden, dass viele Banken Versicherungen abschließen und diese im BIA und STA ansonsten nicht in Betracht kommen. Die dritte Auswirkungsstudie zeigt, dass das Ziel, die Gesamtanforderung aufrechtzuerhalten, mit der Annahme von 12% erreicht wird (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2003c).

Der Ausschuss traf bei der Festsetzung des Anteils der Kapitalanforderung für operationelle Risiken die Annahme, dass der Anteil des für operationelle Risiken gehaltenen ökonomischen Eigenkapitals dem Anteil der regulatorischen Anforderung entspricht. Vielfach wurde kritisiert, dass ökonomisches und regulatorisches Eigenkapital nicht vergleichbar seien (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001; Gramlich und Gramlich 2002). Der Problematik, dass verschiedene Methoden und Messverfahren für die ökonomische Kapitalallokation zum Einsatz kommen, die außerdem die Risikoneigungen und Prioritäten der Banken ausdrücken, war sich der Ausschuss bei der Kalibrierung bewusst (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2001, 2003a). Anzumerken ist, dass bei der Festsetzung des ökonomischen Kapitals von den Banken z.T. Versicherungen berücksichtigt werden, was zu einer möglichen Unterschätzung des Risikos, aber nicht notwendigerweise zu einer unangemessenen Kapitalanforderung führt. Allerdings fällt die Großzahl der erhobenen Verhältnisse in den Bereich um 12% und die Auswirkungsstudien lassen er-

warten, dass das Ziel der Aufrechterhaltung der Kapitalanforderung erreicht wird. Deshalb erscheint die Festsetzung angemessen.

Der Ausschuss beabsichtigt eine Überprüfung und eventuelle Neukalibrierung der Faktoren, wenn in Zukunft eine bessere Datenbasis vorliegt.

### 2.3.1 Basisindikatoransatz

Die Kalibrierung des Alpha-Faktors im BIA setzt den branchenweiten Bruttoertrag als Indikatorgröße mit der momentanen Kapitalanforderung für operationelle Risiken (12% der Kapitalanforderung im Gesamtsystem) ins Verhältnis (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2004). Liegt eine für die gesamte Branche repräsentative Stichprobe vom Umfang  $n$  vor, bestimmt sich der Alpha-Faktor demnach zu

$$\alpha = \frac{0,12 \cdot \sum_{i=1}^n MRK_i}{\sum_{i=1}^n GI_i},$$

wobei  $MRK_i$  die Mindesteigenkapitalanforderung nach Basel I und  $GI_i$  den Bruttoertrag einer Bank bezeichnen.

Die Kalibrierung erfolgte auf Basis der Angaben der Banken in den ersten Auswirkungsstudien Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2001, 2003a). In der dritten Auswirkungsstudie (Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2003c) wurde die Kalibrierung überprüft. Auf Basis einer fünften Auswirkungsstudie, die Ende 2005 durchgeführt wurde, sollen die Parameter nochmals überprüft werden. Die Ergebnisse liegen noch nicht vor.

Die für die Kalibrierung herangezogenen Daten in Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2001) umfassen 126 Beobachtungen auf Basis gemittelter Daten der Jahre 1998-2000 der Banken und 355 individueller Beobachtungen im selben Zeitraum. An der Erhebung der Daten für das Jahr 2001 in Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2003a) nahmen 89 Banken teil. Der Ausschuss hält die Stichproben für die Kalibrierung für ausreichend repräsentativ.

In den Auswirkungsstudien wurden zusätzlich die Verteilungen der Alpha-Faktoren sowohl über allen Banken als auch getrennt nach großen, international tätigen Instituten und kleineren, national tätigen Banken betrachtet. Zwar ergab sich eine breite Spanne zwischen den Maximal- und Minimalwerten, jedoch lag ein Großteil der Beobachtungen im Bereich 13%-22%. Der Ausschuss merkt dazu an, dass die Verfolgung des Kompensationsansatzes signifikante Änderungen der Kapitalanforderungen individueller Institute nicht ausschließt.

Angaben, inwieweit bei der Kalibrierung des Alpha-Faktors ein Aufschlag berücksichtigt wurde, um den Banken Anreize zu geben, in fortgeschrittenere Ansätze zu wechseln, sind nicht veröffentlicht. Da sowohl der BIA als auch der STA auf Basis derselben Kapitalanforderung im Gesamtsystem kalibriert wurden, hätte ein Aufschlag im BIA der Intention gefolgt, Anreize

zum Wechsel aus dem BIA zum STA zu geben. Von großen, international tätigen Banken wird erwartet, dass sie mindestens den STA anwenden. Daher hätte ein Aufschlag dem Ziel der Aufrechterhaltung der Kapitalanforderung im Gesamtsystem vor allem für diese Gruppe nicht widersprochen. Die veröffentlichten Zahlen in Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2003a) lassen auf die Verwendung eines Aufschlags schließen.

### 2.3.2 Standardansatz

Das Vorgehen zur Kalibrierung der Beta-Faktoren der einzelnen Geschäftsfelder entspricht dem Vorgehen zur Kalibrierung des Alpha-Faktors. Der Bruttoertrag des Geschäftsbereichs als Indikatorgröße wird mit der momentanen Kapitalanforderung für operationelle Risiken ins Verhältnis gesetzt. Dabei wird wieder die Annahme getroffen, dass 12% der Kapitalanforderung nach Basel I zur Deckung operationeller Risiken gehalten werden.

Um die Kapitalanforderung für den jeweiligen Geschäftsbereich zu bestimmen, wurde für die Jahre 2000 und 2001 das Verhältnis des für das Geschäftsfeld vorgehaltenen ökonomischen Eigenkapitals zum gesamten von der Bank vorgehaltenen ökonomischen Kapital erhoben.

Für eine repräsentative Stichprobe mit Umfang  $n$  ergibt sich der Beta-Faktor eines Geschäftsbereichs  $j$  aus

$$\beta_j = \frac{0,12 \sum_{i=1}^n MRK_i \cdot \frac{EK_{i,j}}{TEK_i}}{\sum_{i=1}^n GI_{i,j}} .$$

$MRK_i$  bezeichnet dabei die Mindesteigenkapitalanforderung nach Basel I,  $EK_{i,j}$  das für den Geschäftsbereich  $j$  vorgehaltene ökonomische Kapital und  $TEK_i$  das gesamte von der Bank vorgehaltene ökonomische Kapital.  $GI_{i,j}$  bezeichnet den Bruttoertrag im Geschäftsbereich  $j$ .

Problematisch ist vor allem die kleine Anzahl der Banken, deren Daten für die Kalibrierung verwendet wurde. In Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2001) stellten nur 29 Banken Daten nach Geschäftsbereichen getrennt zur Verfügung. Da nicht alle Banken davon in allen Geschäftsbereichen aktiv sind, basieren die Ergebnisse auf Stichproben von nur 14 Banken im Bereich Vermögensverwaltung bis zu 27 Banken im Firmenkundengeschäft. In Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2003a) vergrößerten sich die Stichproben geringfügig, so dass zwischen 16 Beobachtungen im Bereich Unternehmensfinanzierung bis zu 39 im Retail-Geschäft vorliegen. Die nötige Repräsentativität zur branchenweiten Festlegung der Faktoren ist damit nicht gegeben. Als problematisch gilt außerdem die Festsetzung des momentan für operationelle Risiken in einem Geschäftsfeld gehaltenen Mindestkapitals. Neben unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung des ökonomischen Kapitals, z.B. der Einbeziehung von Versicherungen, spiegeln die Höhen auch die Risikoneigungen der Banken wieder. Bei der Festlegung des ökonomischen Kapitals

der Geschäftsbereiche kommen außerdem Priorität und Größe hinzu, die die Geschäftsfelder in den einzelnen Banken haben.

In der zweiten Auswirkungsstudie werden die resultierenden Verteilungen der Beta-Faktoren über den Banken betrachtet. Sie sind unterschiedlich breit gestreut. Die Bereiche Unternehmensfinanzierung und Handel weisen die größten Bereiche der mittleren 50% auf, während die Streuung im Wertpapierprovisionsgeschäft am kleinsten ist. Mittelwert, Median und gewichteter Durchschnitt ergeben andere Rangordnungen der Geschäftsbereiche nach ihrem Risiko. Die großen Streuungen werfen die Frage auf, ob die intuitive Annahme richtig ist, dass die unterschiedlichen Bereiche in unterschiedlicher Höhe operationellen Risiken ausgesetzt sind. Statistische Tests in Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2001) lehnen die Hypothese gleicher mittlerer Beta-Faktoren bei gewöhnlichen Konfidenzniveaus nicht ab.

Eine Analyse der Angaben der Banken in der dritten Auswirkungsstudie zu operationellen Risiken wurde nicht veröffentlicht. Jedoch wird laut der Erhebung das Ziel erreicht, dass sich keine nennenswerte Änderung der Kapitalanforderung im Standardansatz ergibt. An der dritten Auswirkungsstudie nahmen 365 Banken teil, darunter 188 aus den G10 Ländern.

Durch die für einige Geschäftsbereiche festgelegten Beta-Faktoren von 15% und 18% könnte der gewünschte Anreiz zum Wechsel vom BIA in den STA für Banken entfallen, die vorwiegend in diesen Geschäftsbereichen aktiv sind. Jedoch legt das Ergebnis in Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2003c), dass das Retail-Geschäft mit einem Beta-Faktor von 12% für eine Großzahl der Banken das stärkste Gewicht hat, nahe, dass der Anreiz zum Wechsel für die meisten Banken besteht. Chapelle et al. (2005) weisen auf einen ähnlichen Effekt hin, der die Entscheidung über einen Wechsel vom STA in die AMA beeinflusst. Bei dem Wechsel kann sich für Banken mit vorwiegenden Aktivitäten in den Geschäftsbereichen mit niedrigen Beta-Faktoren eine erhöhte Kapitalanforderung ergeben. Durch die Implementierung der AMA und die erhöhten Anforderungen an das Risikomanagement fallen Kosten an, die den Anreiz zusätzlich mindern.

Moscadelli (2004) nutzt ungeachtet der dargestellten Probleme die in Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2003a) gesammelten Daten, um die Kalibrierung durch einen bottom-up-Ansatz zu validieren. Allerdings bezieht er aus methodischen Gründen nur Verluste in die Betrachtung ein, deren Verlusthöhe über dem 99,9%-Quantil der Verlusthöhen liegen. Implizit unterstellt Moscadelli damit, dass der Endbereich der Gesamtschadenverteilung nur von extremen Verlusten bestimmt wird. Verluste unterhalb des 99,9%-Quantils der Verlusthöhenverteilung können jedoch, gerade im Hinblick auf ihre Häufigkeit, nicht unerheblich zum Gesamtschaden beitragen.

Desweiteren kann die Wahl der Grenze nur als willkürlich angesehen werden. Sie leitet sich nicht aus der Anforderung an die AMA in Basel II ab, Verluste zu einem Konfidenzniveau von 99,9% abzusichern. Die Anforderung bezieht sich auf die Verteilung des Gesamtschadens, nicht auf die Verlusthöhenver-

teilung.

Außerdem ersetzt Moscadelli in der Berechnung des erwarteten Gesamtschadens den Erwartungswert der Verlusthöhe durch den Median. Die Beziehung

$$E\left(\sum_{i=1}^N X\right) = E(X) \cdot E(N)$$

für den Erwartungswert der Summe einer zufälligen Anzahl  $N$  von Verlusten  $X$  lässt sich jedoch nicht auf den Median übertragen.

Die genannten Probleme sollten bei der Interpretation der Ergebnisse beachtet und das Risikomaß als abstrakt angesehen werden. Dennoch bestätigen die Ergebnisse Moscadellis die Risikogewichtung der Geschäftsfelder und die festgesetzten Faktoren im Hinblick auf extreme Verluste.

## Kapitel 3

# Fortgeschrittene Messverfahren für operationelles Risiko

Im Folgenden sollen Modelle vorgestellt werden, die im Rahmen der fortgeschrittenen Ansätze (AMA) Anwendung finden können. Eine herausragende Rolle spielen dabei die Verlustverteilungsansätze (LDA), auf die zunächst eingegangen wird.

Vor der Modellierung sollten die Verluste sinnvoll unterteilt werden, so dass die Verluste in den Gruppen als homogen angenommen werden können. Beispielsweise wird bei der Anwendung von Verlustverteilungsansätzen vorausgesetzt, dass die Verluste in einer Gruppe einer identischen oder mindestens ähnlichen Verteilung folgen. Die Anforderungen nach Basel II zur Gliederung der Verluste sollten dabei ebenfalls berücksichtigt werden (vgl. Abschnitt 2.2.3). Allgemein scheint eine Unterteilung nach Risikoarten und nach Geschäftsfeldern adäquat. Die Unterteilung der Risikoarten sollte sich dabei mindestens an der zweiten Ebene der Klassifizierung von Verlustereignissen im Basler Akkord orientieren.

Für die Modellwahl spielt die Unterteilung eine entscheidende Rolle. So ist abzuwägen, ob unter Kosten-Nutzen-Gesichtspunkten eine aufwändige Modellierung lohnt. In Fällen, in denen der Gesamtverlust einer Periode gering und über mehrere Perioden relativ konstant ist, kann eine konservative, pauschale Kapitalhinterlegung angemessen sein. Der Aufwand einer komplexen Modellierung ist dann nicht gerechtfertigt.

Außerdem spielt eine Rolle, wie kontextabhängig die Verluste des betrachteten Risikos sind. Sind sie stark kontextabhängig, so sind vorliegende Daten der Vergangenheit für die Zukunft nicht relevant, und Modelle, die auf historischen Daten beruhen, sind nicht sinnvoll. Mit Expertenmeinungen aus Szenarien gewonnene Daten können zwar Abhilfe schaffen, jedoch sind sie eher als Ergänzung der historischen Daten zu sehen. Embrechts et al. (2003) geben zu einigen Risikoarten eine Einschätzung, ob sich die Ereignisse in der Kategorie wiederholen. In Fällen, in denen wenige Daten vorliegen, müs-

sen Modelle Anwendung finden, die stark auf den Faktoren des Geschäfts- und Kontrollumfelds und Expertenmeinungen basieren. Eine Abwägung der Modellwahl kann nur im Einzelfall stattfinden.

Die Klassifizierung nach Risikoursachen ist zusätzlich unter dem Gesichtspunkt der Risikominderung wichtig. Zur Verbesserung der Kontrollen und Prozesse ist die Zuordnung der Ereignisse zu ihren Ursachen unabdingbar.

Wichtig ist vor allem eine klare und einheitliche Zuordnung zu den einzelnen Klassen, die in sich konsistent ist. Schwierigkeiten ergeben sich, wenn die Ursachen oder Auswirkungen eines Verlustes sich über mehrere Risikoarten oder Geschäftsfelder verteilen. Die im Abschnitt 2.2.3 dargestellten Anforderungen an die Datenerhebung greifen die Probleme der Klassifizierung auf.

Weitere Probleme ergeben sich aus schon eingetretenen Verlustereignissen, die aber in ihrer Höhe noch nicht oder nur teilweise bekannt sind. Ein Beispiel sind langwierige Rechtsstreitigkeiten, deren Ausgang ungewiss ist. Hier sind geeignete Schätzungen über die Verlusthöhe zu treffen.

Sichergestellt werden muss auch, dass die Daten einheitlich vorliegen. So müssen Verluste in eine einheitliche Währung umgerechnet und gegebenenfalls inflationsbereinigt werden.

Nach der Quantifizierung einzelner Risiken, sind diese zum Gesamtrisiko der Bank zu aggregieren. Dabei können im Rahmen der AMA Korrelationen berücksichtigt werden, wenn diese hinreichend begründet werden. Durch Stress-Tests ist darzulegen, dass die Korrelationsannahmen auch in Ausnahmesituationen begründet sind. Im Zweifelsfall ist eine perfekte Korrelation zu unterstellen, und die einzelnen Risiken sind zu addieren. Im folgenden Abschnitt werden zunächst Verlustverteilungsansätze für ein Einzelrisiko in einem Geschäftsbereich beschrieben. In Abschnitt 3.2 wird dann die Aggregation der Einzelrisiken auf Institutsebene erläutert. In den Abschnitten 3.3 und 3.4 werden Kausalmodelle und Scorecard-Ansätze beschrieben.

### **3.1 Verlustverteilungsansätze**

Die wohl wichtigste Rolle der fortgeschrittenen Ansätze (AMA) fällt den Verlustverteilungsansätzen (LDA) zu. Diese versuchen Verteilungen zu schätzen, die operationellen Verlusten zugrunde liegen. Aus diesen werden dann Risikomaße wie der Value-at-Risk (VaR) oder der Expected Shortfall (ES) bestimmt. Im zweiten Konsultationspapier (Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2001) wurden die LDA noch explizit als eine Möglichkeit zur Bestimmung des Mindestkapitals aufgeführt. Die Formulierungen bezüglich der AMA im verabschiedeten Akkord sind allgemein gehalten, und es ist beabsichtigt keine Modelle explizit vorzuschreiben. Es ist davon auszugehen, dass die Regelungen für die AMA vor allem die LDA als geeignete Ansätze erlauben (vgl. Smithson und Song 2004).

Die Ansätze zur Bestimmung der Verlustverteilung stammen aus der Versi-

cherungsmathematik. Die Modellierung erfolgt üblicherweise getrennt nach Verlusthöhen und Verlusthäufigkeiten (vgl. Cruz 2002). Die Eigenschaften der operationellen Risiken rechtfertigen die dazu notwendige Annahme der Unabhängigkeit der Schadenshöhen und deren Auftreten. Der Gesamtschaden einer Periode setzt sich damit aus der zufälligen Anzahl der Verlustereignisse und den jeweiligen Verlusten zusammen.

Die Anzahl der Verlustereignisse wird durch einen stochastischen Zählprozess  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  modelliert. Dieser Prozess wird mit der Folge  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  der Verlusthöhen bewertet. Der Gesamtschaden  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  mit

$$S(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

stellt einen mit den Schadenshöhen bewerteten stochastischen Prozess dar. Im nächsten Abschnitt wird zunächst auf die Schätzung der Verteilung der Verlusthöhen  $(X_i)$  eingegangen. Danach wird die Modellierung der Häufigkeit der Verluste erläutert, bevor dann die Aggregation zum Gesamtverlust näher betrachtet wird. Durch die Annahme der Unabhängigkeit von Verlusthöhen und -häufigkeit kann die Betrachtung getrennt erfolgen. Die zu bestimmenden Parameter gelten für den Prozess des Gesamtschadens gleichermaßen (vgl. Reiss und Thomas 2001).

### 3.1.1 Verlusthöhenverteilung

Im Folgenden werden Methoden zur Ermittlung der Verteilung der Verlusthöhen vorgestellt. Zunächst wird die Verwendung der empirischen Verteilung der Verlusthöhen diskutiert. Im zweiten Ansatz erfolgt die Anpassung klassischer Verteilungen an die vorliegenden Daten. Die im Anschluss dargestellten Methoden verwenden die Extremwerttheorie, zunächst in der Block-Maxima Betrachtung, dann in Form des Peaks-Over-Threshold- (POT-) Ansatzes.

#### 3.1.1.1 Empirische Ermittlung

Die wohl einfachste Methode ist, die empirische Verteilung der vorliegenden Daten als Verlusthöhenverteilung zu verwenden. Sie hat den Vorteil, dass sie keinerlei Annahmen über die zugrunde liegende Verteilung trifft, also parameterfrei ist. Jedoch überwiegen die Nachteile, denn sie liefert schlechte Ergebnisse, wenn, wie bei operationellen Risiken der Fall, wenige Daten vorliegen. Dies schlägt sich insbesondere in den Fehlern bei der Bestimmung höherer Quantile nieder, da die Anzahl der Datenpunkte im Endbereich der Verteilung von Natur aus gering ist. Gerade hohe Quantile sind aber zur Risikomessung von entscheidender Bedeutung. Daher bildet die empirische Verteilung die Verteilung im Bereich hoher Verluste nur unzureichend ab. Im Bereich kleiner und mittlerer Verluste kann sie dagegen Anwendung finden.

### 3.1.1.2 Klassische Verteilungen

Bei klassischer Vorgehensweise werden die vorliegenden Verlustdaten als eine Stichprobe der unbekanntes Grundgesamtheit aller Verluste angesehen. Dabei wird versucht, von der Stichprobe auf die unbekanntes Verteilung der Grundgesamtheit zu schließen. Praktisch wird eine bekannte theoretische Verteilung durch Parameterschätzung an die empirische Verteilung angepasst, mit deren Hilfe dann die Risikomaße bestimmt werden können. Eine Grundannahme bei dieser Methode ist, dass die Verluste unabhängig und identisch verteilt (iid) sind. Sowohl die Unabhängigkeit der Verlusthöhen als auch ihre identische Verteilung sind diskutabel. Die Problematik tritt auch bei anderen Methoden auf und erfordert zum Teil eine komplexe Datenbereinigung vor der Modellierung. Daher wird sie gesondert im Abschnitt 3.1.4 behandelt. Im Folgenden wird von iid Daten ausgegangen.

Für die Anpassung muss zunächst eine Verteilungsannahme getroffen werden. Es erfolgt also eine Festlegung auf die Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, der die zugrunde liegende Verteilung der Verluste angehört. Die charakteristischen Eigenschaften von operationellen Risiken, nämlich das Auftreten vieler Verlustereignisse mit geringem Ausmaß und weniger Ereignisse mit verhängnisvollen Auswirkungen, sollten dabei berücksichtigt werden. Nahe liegend sind daher rechtsschiefe Verteilungen mit großer Wölbung. In der Praxis werden häufig logarithmische Normal-, Gumbel-, oder Pareto-Verteilungen angenommen. Danach werden die Parameter mit Hilfe von als bekannt vorausgesetzten Verfahren geschätzt. Einige Schätzverfahren und die Eigenschaften von Schätzern sind im Anhang B dargestellt. Für eine Abwägung der Maximum-Likelihood-Methode (ML) und der Methode wahrscheinlichkeitsgewichteter Momente (PWM) wird auf Cruz (2002) und die Abschnitte über die Extremwerttheorie verwiesen. Kurz gefasst, empfiehlt sich bei kleiner Datenbasis die Anwendung des PWM-Ansatzes, solange die Existenz der Momente gesichert ist.

Problematisch bei der Anwendung der klassischen Methode ist, dass die Daten von kleinen und mittleren Verlusten, die häufiger auftreten als die hohen im Endbereich, die Parameterschätzung dominieren. In diesem Bereich wird daher eine gute Anpassung erreicht. Im Endbereich liefern klassische Verteilungen jedoch schlechte Ergebnisse (vgl. Moscadelli 2004). Bei der Einschätzung des Risikos ist dieser jedoch ausschlaggebend. Es ist daher naheliegend, die Daten im Endbereich getrennt zu modellieren. Diesen Ansatz vollzieht die Extremwerttheorie, die in den nächsten Abschnitten erläutert wird. Generell kann die Modellierung des Endbereichs zwar ebenfalls mit klassischen Verteilungen erfolgen, dafür wären jedoch stärkere Annahmen als in der Extremwerttheorie nötig. Sie besitzt weiter den Vorteil, dass in den Bereichen mit wenigen Beobachtungen theoretisch gut fundiert extrapoliert wird. Abschließend ist anzumerken, dass die Ermittlung von Erwartungswerten durch klassische Modelle aus genau diesen Gründen gute Ergebnisse liefert.

### 3.1.1.3 Extremwerttheorie – Block-Maxima-Ansatz

Für die Behandlung von Extremen gibt es zwei Modellansätze: im ersten, traditionellen Ansatz werden die Maxima von Beobachtungen in disjunkten Perioden betrachtet.<sup>1</sup> Diese Vorgehensweise wird in diesem Abschnitt vorgestellt. Im zweiten, moderneren Ansatz, der im nächsten Abschnitt behandelt wird, werden Überschreitungen über einen hohen Schwellenwert betrachtet.

**Konvergenzverhalten von Block-Maxima:** Die klassische Extremwerttheorie beschäftigt sich mit dem Konvergenzverhalten der Maxima  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  von Zufallsvariablen in Blöcken der Größe  $n$ .  $m$  Beobachtungen werden also in  $m/n$  Blöcke unterteilt<sup>2</sup> und deren Maxima untersucht. Man spricht daher auch von *Block-Maxima*. Dabei werden die Unabhängigkeit und die identische Verteilung der Maxima vorausgesetzt. Die einzelnen Beobachtungen in den Blöcken können dagegen Abhängigkeiten enthalten (vgl. Embrechts et al. 1997). Die einzig möglichen nicht-degenerierten Grenzverteilungen von Block-Maxima gehören der Familie der Generalized-Extreme-Value-Verteilungen (GEV) an (vgl. McNeil et al. 2005).

Im Folgenden wird kurz die theoretische Grundlage der Block-Maxima Modelle beschrieben. Für eine ausführliche Darstellung wird auf Embrechts et al. (1997) verwiesen. Eine mehr praxisorientierte Darstellung findet sich in McNeil et al. (2005).

**Definition 3.1.1 (Generalized-Extreme-Value-Verteilung (GEV))** Die Verteilungsfunktion der GEV lautet

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right), & \xi \neq 0, \\ \exp\left(-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right), & \xi = 0, \end{cases}$$

wobei  $1 + \xi\frac{x-\mu}{\sigma} > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma > 0$ .<sup>3</sup>

Der Parameter  $\xi$  heißt Gestaltparameter. Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  sind der Lage- und der Skalenparameter. Durch Normalisieren nach  $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$  folgt  $Y$  der Standard-GEV-Verteilung  $H_\xi$  mit nur einem Parameter.

Die GEV-Verteilung vereinigt drei Typen von Verteilungen, die durch  $\xi$  bestimmt sind:

- für  $\xi > 0$  entspricht die GEV-Verteilung einer Fréchet-Verteilung,
- für  $\xi = 0$  entspricht sie einer Gumbel-Verteilung und
- für  $\xi < 0$  einer Weibull-Verteilung.

---

<sup>1</sup>Die Modelle können leicht zur Betrachtung von Minima angepasst werden (vgl. McNeil et al. 2005).

<sup>2</sup>Im letzten Block liegen in Anwendungen oft weniger als  $n$  Beobachtungen vor. Beispielsweise wird bei einer Untersuchung von Jahresmaxima in Blöcken von 365 Tagen das Maximum des laufenden Jahres mit weniger Beobachtungen berücksichtigt.

<sup>3</sup>Vgl. McNeil et al. (2005).

Je größer  $\xi$ , desto langsamer ist der Abfall der Dichte am Ende der Verteilung. Weibull-Verteilungen haben kurze Flanken; für sie existiert im Gegensatz zu Gumbel- und Fréchet-Verteilungen ein rechter Endpunkt (vgl. McNeil et al. 2005). Gumbel- und Fréchet-Verteilungen haben lange Flanken, wobei die Flanken der Fréchet-Verteilung langsamer abfallen.

Weiter ist für den Gebrauch der GEV-Verteilung wichtig, dass die Verteilung kontinuierlich in  $\xi$  ist, d.h.  $\lim_{\xi \rightarrow 0} H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = H_{0, \mu, \sigma}(x)$  (vgl. McNeil et al. 2005).

Praktisch konvergieren die Maxima von Zufallsvariablen aller gebräuchlichen kontinuierlichen Verteilungen gegen eine GEV-Verteilung. McNeil et al. (2005) listen einige Verteilungen mit ihrem Konvergenzverhalten auf. Dies ist ein entscheidender Vorteil der Extremwerttheorie gegenüber klassischen Modellen, die generell auch auf das Ende der Verteilung beschränkt angewandt werden könnten. Dazu würde jedoch eine weitaus stärkere Annahme über die unbekannte zugrunde liegende Verteilung getroffen. Formal definiert man den Maximum-Anziehungsbereich (MDA), und die Konvergenz folgt aus dem Satz von Fisher-Tippett.

**Definition 3.1.2 (Maximum-Anziehungsbereich (MDA))** Sei  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  das Block-Maximum der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  mit Verteilungsfunktion  $F$ . Wenn für zwei Folgen  $d_n \in \mathbb{R}$  und  $c_n > 0$  und für alle  $n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

gilt und  $H(x)$  eine nicht-degenerierte Verteilungsfunktion ist, so liegt  $F$  im Maximum-Anziehungsbereich von  $H$ . Man schreibt  $F \in MDA(H)$ .<sup>4</sup>

**Satz 3.1.3 (Fisher-Tippett, Gnedenko)** Ist  $F \in MDA(H)$  für eine nicht-degenerierte Verteilungsfunktion  $H$ , so ist  $H$  eine Verteilung vom Typ  $H_\xi$ , also eine GEV-Verteilung.<sup>5</sup>

**Praktisches Vorgehen:** Im Folgenden werden die ursprünglich vorliegenden Daten  $x_1, \dots, x_{n \cdot m}$ , die einzelnen Verluste, als die Beobachtungen bezeichnet. Werden die Daten im ersten Schritt aggregiert, so bezeichnen die Beobachtungen die bereits aggregierten Verlustdaten. Es wird angenommen, dass die Beobachtungen Realisationen der gleichen Verteilung  $F$  sind, die als die Verlust- bzw. Beobachtungsverteilung bezeichnet wird. Zur Abgrenzung werden die Maxima  $y_1, \dots, y_m$  der einzelnen Blöcke ausschließlich als Maxima bezeichnet, auch wenn sie die Beobachtungsfolge darstellen, die den Parameterschätzungen zugrunde liegt. Entsprechend werden sie als Realisationen der Maximum-Verteilung  $G$  angenommen.

<sup>4</sup>Vgl. Embrechts et al. (1997); McNeil et al. (2005).

<sup>5</sup>Vgl. McNeil et al. (2005).

Die praktische Anwendung baut auf der Annahme, dass die Verteilung der Beobachtungen  $F$  im Maximum-Anziehungsbereich einer GEV-Verteilung liegt. Daher folgen die Block-Maxima asymptotisch einer GEV-Verteilung. Aus den Beobachtungen werden Blöcke gebildet und deren Maxima bestimmt. Die Maxima werden als Stichprobe angesehen und die Parameter der Grenzverteilung mit Hilfe der in Anhang B dargestellten Verfahren geschätzt.

Bei der Wahl zwischen verschiedenen Methoden zur Parameterschätzung sind Vor- und Nachteile abzuwägen. In Betracht kommen vor allem die ML-Methode und die Methode wahrscheinlichkeitsgewichteter Momente (PWM). Smith (1985) zeigt, dass für  $\xi > -1/2$  die ML-Methode konsistente, effiziente und asymptotisch normalverteilte Schätzer liefert. Hosking et al. (1985) zeigen durch Simulationen, dass die PWM-Methode im Falle einer kleinen Datenbasis bessere Ergebnisse liefert. Während die Effizienz der PWM-Schätzer im Allgemeinen schlechter im Vergleich zur ML-Methode ist, sind sie im Falle von 100 oder weniger Beobachtungen vergleichbar effizient. Sie sind für wenige Beobachtungen weniger verzerrt und weisen geringere Varianzen auf. Außerdem ist die Anwendung der PWM-Methode einfacher. Die Parameter können selbst in einfachen Tabellenkalkulationsprogrammen geschätzt werden. Coleman (2003) kritisiert an der ML-Methode, dass alle Beobachtungen gleich ins Gewicht fallen und favorisiert daher die PWM-Methode, bei der wahrscheinlichere Verluste stärker gewichtet werden.

Zu beachten ist, dass die PWM-Methode nur für Gestaltparameter  $\xi < 1$  möglich ist, da sonst die wahrscheinlichkeitsgewichteten Momente nicht existieren. Hosking et al. (1985) argumentieren, dass Verteilungen mit Gestaltparametern in diesem Bereich die größte Bedeutung zukommt. Allerdings beziehen sich die dort zu findenden Beispiele auf hydrologische Anwendungen. Moscadelli (2004) hingegen wendet die Extremwerttheorie auf Verluste operationeller Risiken an und erhält in fast allen Gruppen Gestaltparameter  $\xi > 1$  und für alle Gruppen  $\xi \geq 0,85$ . Smith (1990) kritisiert weiter die unzureichende theoretische Fundierung der Eigenschaften der PWM-Schätzer. Die einfache Momentenmethode kommt dagegen bei operationellen Risiken nicht in Betracht, da sie die Existenz höherer Momente voraussetzt und dies in den meisten Fällen nicht gegeben sein wird. Für Gestaltparameter  $\xi > 0,5$  existieren die Momente zweiter und höherer Ordnung nicht. Weiter kritisiert Smith (1990), dass durch die schwierige empirische Ermittlung höherer Momente die Ergebnisse „notorisch unzuverlässig“ sind.<sup>6</sup>

Auf den Gestaltparameter und  $\xi > 0$  beschränkt kommt ebenfalls der von Hill (1975) vorgeschlagene Schätzer in Betracht. Der Hill-Schätzer bezieht nur die letzten  $k$  Beobachtungen des Endes der Verteilung ein und ist für die

---

<sup>6</sup> Aus dem Englischen übersetzt: The method of moments is notoriously unreliable on account of the poor sampling properties of second- and higher-order sample moments.

geordnete Beobachtungsfolge  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$  definiert als

$$\hat{\xi}_k = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \ln(x_j) - \ln(x_k) \quad (k = 2, \dots, n) .$$

Meist ist nicht bekannt, welche Beobachtungen zum Ende der Verteilung zählen. Daher wird oft ein Durchschnitt von Schätzwerten, denen verschieden viele Beobachtungen zugrunde liegen, gebildet. Dabei werden verschiedene Schätzwerte über  $k$  abgetragen und der Durchschnitt der Werte im Endbereich gewählt, für die der Graph relativ stabil ist.

Der Vorteil des Hill-Schätzers ist, dass er nicht voraussetzt, dass die Beobachtungen exakt einer asymptotischen Verteilung folgen. Er liefert daher oft effizientere Schätzer als andere Methoden (vgl. Cruz 2002). Der Hill-Schätzer folgt asymptotisch der Normalverteilung und ist konsistent. Allerdings muss er sehr achtsam angewendet werden und liefert für hohe Werte von  $\xi$  schlechte Ergebnisse (vgl. Embrechts et al. 1997; Moscadelli 2004).

Weitere mögliche Schätzer sind der Pickands-Schätzer und der von Dekkers, Einmal und de Haan. Sie setzen größere Datenmengen voraus. Für eine Darstellung wird auf Embrechts et al. (1997) verwiesen.

Bevor die gewünschten Risikomaße bestimmt werden können, muss der Bezug (auf einen Zeitraum oder einzelne Verluste) der geschätzten Verteilung dem der Risikoschätzung angepasst werden. Bezieht sich die Risikoschätzung auf die Beobachtungen, also auf einzelne oder auf zeitlicher Basis aggregierte Verluste, so ist die Anwendung der GEV unproblematisch. Denkbar ist die Situation, in der man die Verluste auf täglicher Basis aggregiert und an einem Tages-Risikomaß interessiert ist.<sup>7</sup> Andererseits könnte eine Abschätzung des Ausmaßes einzelner Verlustereignisse von Interesse sein. In beiden Fällen ist eine gesonderte Betrachtung der Verlusthäufigkeiten nicht nötig, da die zeitliche Komponente im ersten Fall mitbetrachtet wird und im zweiten Fall uninteressant ist. Die Risikomaße können also direkt aus der geschätzten Verteilung bestimmt werden.

Allerdings kann aus der Maximum-Verteilung nur eine obere Abschätzung des Risikos gewonnen werden. Es handelt sich schließlich um die Verteilung des Maximums aus mehreren Beobachtungen. Um zu einer genaueren Schätzung zu gelangen, kann von der Maximum-Verteilung auf die Verlustverteilung geschlossen werden. Die Unabhängigkeit der Beobachtungen vorausgesetzt gilt für das Maximum  $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$  eines Blocks mit den

---

<sup>7</sup> Bereits hier sei erwähnt, dass die Anwendung zur Bestimmung der Kapitalanforderung für operationelle Risiken nach Basel II, also für eine einjährige Vorhalteperiode, ungeeignet erscheint.

Beobachtungen  $X_1, \dots, X_n$

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq y) = P(X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y) \\ &= P(X_1 \leq y) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq y) = F(y) \cdot \dots \cdot F(y) \\ &= [F(y)]^n \approx G(y) . \end{aligned}$$

Daher lässt sich die eigentliche Verlustverteilung  $F$  durch

$$F(y) \approx [G(y)]^{(1/n)}$$

approximieren. Allerdings liegt das Maximum eines Blockes unter der Konvergenzbedingung einer möglichst hohen Blockgröße mit zunehmend großer Wahrscheinlichkeit nahe dem Endpunkt der Verlustverteilung. Da die für den Rückschluss verwendete Beziehung nur in dem Bereich gilt, in dem das Maximum liegt, ist die Approximation nur im Endbereich der Verteilungen möglich (vgl. Embrechts et al. 1997). Es ist nicht bekannt, ab welchem Wert der Endbereich beginnt. Für hohe Quantile kann die Approximation dennoch verwendet werden.

Stimmt der Bezugszeitraum der Verteilung und der Risikoschätzung nicht überein, gestaltet sich die Anwendung der GEV problematischer. Dies ist zum einen der Fall, wenn Risikomaße für ein Zeitintervall aus nicht zeitlich aggregierten Verlustbeobachtungen bestimmt werden sollen. Andererseits tritt der Fall auf, dass aggregierte Daten vorliegen, der zeitliche Bezug der Risikomaße aber nicht mit dem der Aggregation übereinstimmt. Wie in den anderen vorgestellten Modellen müssen wegen der stochastischen Anzahl der Verlustereignisse im ersten Fall die Häufigkeiten getrennt modelliert und mit der hier bestimmten Verlusthöhenverteilung zu einer Gesamtschadenverteilung aggregiert werden (siehe Abschnitte 3.1.2 und 3.1.3). Im zweiten Fall ist die Anzahl der Ereignisse dagegen deterministisch; die geschätzte Verteilung kann einfach gefaltet werden. Liegen z.B. Tagesverluste vor und ein wöchentliches Risikomaß soll bestimmt werden, so treten in der Halteperiode fünf Ereignisse (Tage) auf. Um die Verteilung des wöchentlichen Verlustes zu bestimmen, muss die Verteilung fünf Mal gefaltet werden.

In diesen Fällen kann wieder durch die Verwendung der Maximum-Verteilung eine obere Abschätzung des Risikos gegeben werden. Allerdings ist zu beachten, dass mit zunehmender Anzahl der Ereignisse im betrachteten Zeithorizont eine zunehmend gröbere Abschätzung gewonnen wird. Dies ist vor allem der Fall, wenn sich die einzelnen Beobachtungen in ihrer Höhe stark unterscheiden.

Theoretisch könnte wie oben von der Maximum-Verteilung auf die Beobachtungsverteilung geschlossen werden. Da die Approximation nur für den Endbereich gilt, liegt es nahe, sie für die Faltung mit einer anderen Approximation für den Rest der Verteilung, z.B. der empirischen Verteilung, zu kombinieren. Jedoch ist nicht bekannt, wo der Endbereich der Verteilung beginnt. Das Vorgehen erscheint deshalb fragwürdig.

Zusammenfassend ist die Anpassung des Bezugszeitraums problematisch. Entweder wird mit zunehmender Zahl der Faltungsoperationen die Risikoschätzung immer ungenauer oder die Approximation der Verlustverteilung selbst erscheint problematisch, da die Übergangsstelle der Approximationen willkürlich festgelegt werden muss.

Das Problem der Blockeinteilung der Daten wurde bisher nicht betrachtet. Generell muss zwischen einer hohen Anzahl  $n$  an Beobachtungen in einem Block und einer großen Zahl  $m$  von Block-Maxima abgewogen werden. Die Konvergenzbedingung fordert Blöcke mit vielen Beobachtungen. Daher sind die Parameterschätzungen weniger verzerrt, je größer  $n$  ist. Andererseits basiert die Parameterschätzung auf den Maxima als Beobachtungsfolge. Eine große Anzahl  $m$  an Block-Maxima führt daher zu geringen Varianzen der Schätzwerte (vgl. McNeil et al. 2005).

Verfahren zur Bestimmung der optimalen Blockgröße zur Einteilung der Daten existieren nicht. Nach McNeil et al. (2005) soll die Einteilung möglichst intuitiv vorgenommen werden. Die Veränderung des Gestaltparameters bei Variation der Blockgröße ist relativ klein. Allerdings ist ein intuitives Vorgehen nicht möglich, wenn die Anzahl der Ereignisse in festen Zeitintervallen stochastisch ist.

Ein graphisches Verfahren kann Anhaltspunkte über geeignete Blockgrößen liefern. Können die Daten mit Hilfe der GEV approximiert werden, so ändert sich der Gestaltparameter mit zunehmender Blockgröße nicht (vgl. Hawkins 2005). Man trägt die Schätzwerte über der Blockgröße ab und wählt die kleinste Blockgröße, ab der der Graph annähernd konstant ist. Am Ende des Graphen wird der Schätzwert wieder stark variieren, da zu wenige Beobachtungen für die Parameterschätzung vorliegen.

Die klassischen Anwendungsgebiete der GEV sind ökologische, vor allem hydrologische Modelle. In der Anwendung auf Verluste stellt sich ein weiteres Problem bei der Blockeinteilung, das in den anderen Anwendungen der GEV nicht auftritt. Die Anzahl der Beobachtungen pro Zeitintervall, also die Anzahl der Verlustereignisse, ist stochastischer Natur. Um eine deterministische Blockgröße zu erhalten, können die Blöcke also nicht nach Zeitintervallen aufgeteilt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, die zeitliche Komponente wie gewöhnlich getrennt zu betrachten (siehe Abschnitt 3.1.2). Dementsprechend werden die Verluste ungeachtet ihres zeitlichen Eintritts in Blöcke einer fixen, willkürlich festzulegenden Größe aufgeteilt.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Verluste über zeitliche Intervalle zu aggregieren. Dies hat den Vorteil, dass die dargestellten Probleme bei der Anpassung der geschätzten Verteilung an den Bezugszeitraum der Risikoschätzung umgangen werden können. Man aggregiert die Verluste über Zeitintervalle, die dem Zeithorizont der Risikobestimmung entsprechen, und

kann anschließend ohne weitere Anpassungen Risikomaße aus der gewonnenen Verteilung bestimmen. Die Verlusthäufigkeiten müssen nicht gesondert betrachtet werden, und die Anpassung des Bezugs ist überflüssig, wodurch der Rückschluss auf die Beobachtungsverteilung für hohe Quantile unproblematisch ist. Cruz (2002) bevorzugt diese Vorgehensweise gegenüber der im Anschluss dargestellten POT-Methode, da Zeit- und Höhenkomponente gleichzeitig betrachtet werden.

Problematisch an dieser Vorgehensweise, besonders im Bezug auf operationelle Risiken, ist die weitere Reduzierung der Anzahl der vorliegenden Datenmenge. Daher ist das Verfahren für eine Berechnung der Kapitalanforderung nach Basel II ungeeignet. Um die geschilderten Probleme zu umgehen, wäre eine Aggregation der Verluste zu Beobachtungen von Jahresverlusten nötig. Es ist offensichtlich, dass für die Blockbildung und anschließende Parameterschätzung nach der Aggregation nicht ausreichend Daten vorliegen. Dennoch wird in Anhang C.2 ein Anwendungsbeispiel gegeben, da das Verfahren für kürzere Zeithorizonte oder zeitunabhängige Probleme durchaus Anwendung finden kann.

Abschließend sollen die Unterschiede zwischen den klassischen Anwendungsgebieten der GEV und der Anwendung auf operationelle Risiken ausführlich dargestellt werden. Als Beispiel einer ökologischen Anwendung diene die Bestimmung der nötigen Bauhöhe eines Damms. Zunächst liegen in den meisten Fällen, so auch für Pegelstände, umfangreiche Datenhistorien vor. Daher ist die Reduzierung der Beobachtungen bei der Blockbildung unproblematischer als in der Anwendung auf operationelle Verluste. Jüngere Aufzeichnungen bestehen aus den maximalen Pegelständen pro Tag. In diesem Fall stellen die Beobachtungen selbst Maxima dar, und die Blockbildung ist nicht mehr nötig. Alle vorliegenden Beobachtungen können direkt in die Parameterschätzung einfließen.

Ein entscheidender Unterschied ist zudem, dass Pegelstände unterhalb der Maxima innerhalb eines Zeitraumes nicht von Interesse sind. Ist die Bauhöhe für den maximalen Pegelstand ausreichend hoch, so natürlich auch für alle anderen Pegelstände desselben Zeitraums. Die Anwendung gestaltet sich deshalb denkbar einfach. Praktisch wird ein Zeitintervall  $T$  festgesetzt, in dem die Bauhöhe nur einmal überschritten werden soll. Anschließend wird die nötige Höhe über die Quantilsfunktion mit  $p = 1 - 1/T$  bestimmt.

Verluste hingegen addieren sich zu einem Gesamtverlust. Daher sind auch nicht maximale Verluste von Bedeutung, besonders wenn die Blockgröße hoch gewählt wird, also viele Verluste in einem Block zusammengefasst sind. Dieser Unterschied birgt die Problematik der groben Abschätzung durch die Maximum-Verteilung. Die Approximation der Beobachtungsverteilung durch den dargestellten Rückschluss und die Kombination mit einer anderen Approximation für den Rest der Verteilung und deren anschließende Faltung ist

dagegen noch problematischer.

Das Problem wird durch die Aggregation der Verluste über den für die Risikoschätzung betrachteten Zeitraum gelöst. Gleichzeitig erübrigt sich mit der Aggregation das Problem der stochastischen Anzahl der Ereignisse in festen Zeitintervallen, welches sich in der hydrologischen Anwendung ebenfalls nicht stellt.

Die dargestellten Eigenschaften begründen die natürliche Eignung des GEV-Modells für hydrologische und andere ökologische Anwendungen. Ebenso rühren hier die Schwierigkeiten in der Anwendung auf operationelle Risiken her.

Insgesamt ist das GEV-Modell im Bezug auf operationelle Risiken eher ungeeignet. Problematisch ist vor allem die Reduzierung der ohnehin schon geringen Datenmenge durch Blockbildung und Aggregation. Über die Maximumverteilung kann nur eine sehr grobe Abschätzung des Risikos gewonnen werden. Die GEV sollte daher nur zur Anwendung kommen, wenn eine getrennte Modellierung von Verlusthöhen und Verlusthäufigkeiten nicht gewünscht ist.

#### 3.1.1.4 Extremwerttheorie – Peaks-Over-Threshold-Ansatz

Die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellte Methode der Block-Maxima hat den Nachteil, dass sie nur einen Bruchteil der ohnehin meist kleinen Datenmenge verwendet. Vor allem deshalb wurde sie in der Praxis weitgehend von der Peaks-Over-Threshold- (POT-) Methode abgelöst, die im Folgenden erläutert wird. Sie betrachtet alle Datenpunkte, die einen hohen Schwellenwert überschreiten und insofern als extrem angesehen werden (vgl. McNeil et al. 2005).

**Konvergenzverhalten von Exzessverteilungen:** Die Verteilung der Höhe der Überschreitungen über einen Schwellenwert  $u$  sei wie folgt definiert:

**Definition 3.1.4 (Exzessverteilung)** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F$ . Dann ist für den rechten Endpunkt von  $F$   $x_F \leq \infty$  und  $0 \leq x < x_F - u$

$$F_{(u)}(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

die Exzessverteilung von  $X$  zum Schwellenwert  $u < x_F$ .<sup>8</sup>

Liegt den Verlusten eine gebräuchliche kontinuierliche Verteilung  $F$  zugrunde, konvergiert die Exzessverteilung  $F_{(u)}$  mit steigendem  $u$  ( $u \rightarrow x_F$ ) gegen eine Verallgemeinerte-Pareto-Verteilung (GPD).

---

<sup>8</sup>Vgl. McNeil et al. (2005).

**Definition 3.1.5 (Verallgemeinerte Pareto Verteilung (GPD))** Die Verteilungsfunktion der GPD lautet

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(\frac{-x}{\beta}\right), & \xi = 0, \end{cases}$$

wobei  $\beta > 0$  und

$$\begin{aligned} x &\geq 0 && \text{für } \xi \geq 0 \text{ und} \\ 0 \leq x \leq \frac{-\beta}{\xi} &&& \text{für } \xi < 0. \end{aligned}$$

$\xi$  bezeichnet wieder den Gestaltparameter,  $\beta$  den Skalenparameter. Durch Hinzunehmen eines Lageparameters  $\mu$  kann die Familie durch  $G_{\xi,\mu,\beta}(x) = G_{\xi,\beta}(x - \mu)$  erweitert werden. Wählt man  $\mu = u$ , so erhält man aus der zweiparametrischen Exzessverteilung  $F_{(u)}$  die dreiparametrische durch die Überschreitung vom Schwellenwert  $u$  bedingte Verteilung der Verluste  $F_{[u]}$ . Die GPD vereinigt drei Verteilungen, die von  $\xi$  abhängen:

- für  $\xi > 0$  entspricht die GPD der gewöhnlichen Pareto-Verteilung in reparametrisierter Form,
- für  $\xi = 0$  entspricht sie einer Exponential-Verteilung und
- für  $\xi < 0$  einer Pareto-Typ II-Verteilung.

Die Interpretation des Gestaltparameter  $\xi$  gleicht der der GEV-Verteilung: Je größer  $\xi$ , desto langsamer der Abfall der Dichte am Verteilungsende. Die Verteilung ist für ein festes  $x$  kontinuierlich in  $\xi$ , d.h.  $\lim_{\xi \rightarrow 0} G_{\xi,\beta}(x) = G_{0,\beta}(x)$ . Die Konvergenz folgt aus dem Satz von Pickands-Balkema-de Haan:

**Satz 3.1.6 (Pickands-Balkema-de Haan)** Es existiert eine (positiv messbare) Funktion  $\beta(u)$ , so dass

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x \leq x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi,\beta(u)}(x)| = 0,$$

genau dann, wenn  $F \in MDA(H_\xi)$  mit  $\xi \in \mathbb{R}$ .<sup>10</sup>

Die Grenzverteilung der Exzesse folgt also einer GPD-Verteilung genau dann, wenn die Maxima asymptotisch einer GEV-Verteilung folgen. Die Gestaltparameter  $\xi$  sind in beiden Fällen gleich. Dementsprechend konvergieren die Exzessverteilungen der gebräuchlichen kontinuierlichen Verteilungen gegen eine GPD-Verteilung.

Einige Eigenschaften der GPD-Verteilung, auf die später zurückgegriffen wird, werden im Folgenden dargestellt, bevor auf die praktische Vorgehensweise eingegangen wird.

<sup>9</sup>Vgl. McNeil et al. (2005).

<sup>10</sup>Vgl. McNeil et al. (2005).

## Eigenschaften der GPD-Verteilung

**GPD-Stabilität:** Die GPD ist stabil gegenüber einer Anhebung des Schwellenwertes: ist  $Y$  GPD-verteilt und sei  $v > 0$ , dann ist  $Y - v$  unter der Bedingung  $Y > v$  ebenfalls GPD-verteilt (vgl. Davison und Smith 1990). Weiter bleibt der Gestaltparameter  $\xi$  gleich (vgl. Moscadelli 2004).

**Existenz der Momente:** Im Fall von  $\xi > 0$  besteht ein direkter Zusammenhang zwischen dem Gestaltparameter  $\xi$  und der Existenz der Momente der Form

$$E(x^k) = \infty \forall k \geq 1/\xi. \text{ }^{11}$$

**Linearität der Exzessmittelwertfunktion:** Die Exzessmittelwertfunktion (EMF) und ihr empirisches Pendant (SMEF) seien wie folgt definiert:

**Definition 3.1.7 (Exzessmittelwertfunktion (MEF))** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F$  und rechtem Endpunkt  $x_F$ . Für  $u \leq x_F$  heißt

$$e(u) = E(X - u | X > u)$$

Exzessmittelwertfunktion von  $X$ .<sup>12</sup>

**Definition 3.1.8 (Empirische Exzessmittelwertfunktion (SMEF))** Seien  $x = (x_1, \dots, x_n)$  die Realisationen der Zufallsvariablen  $X_i$  einer Stichprobe vom Umfang  $n$ . Die Funktion

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - u) 1_{\{x_i > u\}}}{\sum_{i=1}^n 1_{\{x_i > u\}}}$$

heißt empirische Exzessmittelwertfunktion von  $X$ .<sup>13</sup>

Insbesondere ist die Exzessmittelwertfunktion einer GPD-verteilten Zufallsvariable  $X$  mit  $\xi < 1$  linear:

$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \beta + \xi u > 0. \text{ }^{14}$$

Verteilungen der GPD-Familie sind die einzigen Verteilungen, die diese besondere Eigenschaft aufweisen (vgl. Reiss und Thomas 2001).

---

<sup>11</sup> Vgl. Reiss und Thomas (2001).

<sup>12</sup> Vgl. Embrechts et al. (1997).

<sup>13</sup> Vgl. Moscadelli (2004).

<sup>14</sup> Vgl. Embrechts et al. (1997).

**Praktisches Vorgehen:** Praktisch soll eine unbekannte Verlustverteilung approximiert werden. Zunächst wird nur die durch die Überschreitung des Schwellenwertes  $u$  bedingte Verteilung  $F_{[u]}$  oder die Exzessverteilung  $F_{(u)}$  geschätzt.

In Anwendungsfällen wie der Berechnung von Versicherungsprämien entspricht die Auszahlung den Exzessen über die Eigenbeteiligung. Stimmt die Höhe der Eigenbeteiligung mit dem Schwellenwert überein, so können Prämien und Risiken daher über die Exzessverteilung bestimmt werden. Da der Schwellenwert nach der Konvergenzbedingung hoch zu wählen ist, ist dieser Fall aber eher im Bereich der Rückversicherung realistisch.

Ist dagegen die eigentliche Verlustverteilung  $F$  von Interesse wie im Falle der Berechnung der Kapitalanforderung für operationelle Risiken, muss die zunächst geschätzte Verteilung in die nicht bedingte Verteilung überführt werden. Wie gezeigt wird, erhält man auf diese Weise eine Approximation der Verlustverteilung  $F$  für Verluste über dem Schwellenwert ( $x \geq u$ ).

Im Folgenden wird die Vorgehensweise aus Embrechts et al. (1997) erläutert. Dabei wird die Exzessverteilung  $F_{(u)}$  aus den Daten geschätzt. Liegen die eigentlichen Verlusthöhen als Beobachtungen vor, so müssen die Verluste vor der Schätzung in Exzesse transformiert werden. Coleman (2003) schätzt dagegen die bedingte Verteilung  $F_{[u]}$ , wobei die eigentlichen Verluste in die Schätzung eingehen. In beiden Fällen werden nur die Verluste, die den Schwellenwert  $u$  überschreiten, betrachtet.

Vor der Parameterschätzung stellt sich zunächst das Problem, in welcher Höhe der Schwellenwert  $u$  zu wählen ist. Einerseits ist  $u$  ausreichend hoch zu wählen, um die Konvergenzbedingung zu erfüllen und so eine gute Approximation und eine geringe Verzerrung zu gewährleisten. Andererseits sollen ausreichend viele Werte über  $u$  liegen, damit statistische Methoden zuverlässige Ergebnisse liefern können und die Varianzen der Schätzwerte klein sind.

Die graphische Methode, die Davison und Smith (1990) vorschlagen, ist wegen ihrer Einfachheit die meist angewandte Methode. Sie basiert auf der Linearität der MEF  $e(u)$  der GPD. Die empirisch ermittelte SMEF  $e_n(u)$  wird über  $u$  abgetragen. Stimmt die Annahme, dass die Exzesse für ein  $u$  approximativ GPD-verteilt sind, so wird der Graph im Bereich  $v > u$  eine annähernd lineare Gestalt annehmen. Man wählt  $u$  also in dem Bereich, in dem der Graph der SMEF einer Geraden gleicht. In diesem Bereich muss bei der Wahl zwischen der Erfüllung der Konvergenzbedingung, also einem möglichst hohen Schwellenwert, und der Voraussetzung für gute Schätzwerte, dass genügend Beobachtungen über  $u$  liegen, abgewogen werden.

Moscadelli (2004) überprüft die Wahl des Schwellenwertes  $u$  durch ein Verfahren, das die Stabilität der GPD gegenüber Anhebung der Schwelle ausnutzt. Verluste, die über dem Schwellenwert  $u$  liegen, werden als Schwellen-

wert  $v$  angenommen, und eine neue Schätzung des Gestaltparameters mit  $v$  durchgeführt. Die Schätzer werden in einem Graphen über den Schwellenwerten  $v$  abgetragen. Ist die Annahme der GPD richtig, so sollte der Graph für Werte  $v > u$  relativ stabil sein. Für sehr hohe Werte von  $v$  wird dies nicht mehr der Fall sein, da zu wenige Beobachtungen zur Schätzung herangezogen werden. Dieses Verfahren ist jedoch äußerst rechenaufwändig, da für jeden Schwellenwert eine Schätzung durchgeführt werden muss. Daher ist im Einzelfall abzuwägen, ob die Anwendung des Verfahrens lohnt.

Algorithmen zur Festlegung des Schwellenwertes werden in Dupuis und Victoria-Feser (2003) und Danielsson et al. (2000) dargelegt. Allerdings wird meist von automatisierten Verfahren abgeraten (vgl. Cruz 2002). McNeil und Saladin (1997) zeigen in Simulationen die Auswirkung der Anzahl von Beobachtungen im Endbereich auf Quantilsschätzungen. Sie geben minimale Anzahlen für verschiedene Verteilungen und Quantile an, die zu annehmbaren Ergebnissen führen.

Nach der Festlegung des Schwellenwertes kann die Parameterschätzung durch die im Anhang B dargestellten Methoden erfolgen. Bei der Wahl zwischen verschiedenen Methoden zur Parameterschätzung sind dieselben Vor- und Nachteile abzuwägen wie bei der Approximation durch die GEV.

Die klassische Momentenmethode erscheint ungeeignet, da sie die Existenz höherer Momente voraussetzt. Außerdem ist die empirische Ermittlung der Momente im Falle kleiner Datenmengen problematisch. Daher kommen vor allem die ML-Methode und die Methode wahrscheinlichkeitsgewichteter Momente (PWM) in Betracht.

ML-Schätzer sind für  $\xi > -1/2$  konsistent, effizient und asymptotisch normalverteilt (vgl. Smith 1985). Generell sind sie effizienter als die PWM-Schätzer. Hosking et al. (1985) zeigen aber, dass die PWM-Methode im Falle kleiner Datenbasis von 100 oder weniger Beobachtungen bessere Ergebnisse liefert. Sie sind für wenige Beobachtungen weniger verzerrt und weisen geringere Varianzen auf. Ihre Anwendung ist zudem einfacher und kann ohne spezielle Statistiksoftware durchgeführt werden. Allerdings ist die PWM-Methode nur für Gestaltparameter  $\xi < 1$  möglich, da sonst die wahrscheinlichkeitsgewichteten Momente nicht existieren. In Anwendungen auf operationelle Risiken in verschiedenen Geschäftsbereichen erhält Moscadelli (2004) durch ML-Schätzungen in fast allen Bereichen Gestaltparameter  $\xi > 1$ .

Für  $\xi > 0$  kommt ebenfalls der Hill-Schätzer in Betracht, der in Abschnitt 3.1.1.3 eingeführt wurde. Er ist konsistent und asymptotisch normalverteilt. Für hohe Werte des Gestaltparameters liefert er allerdings schlechte Ergebnisse, weshalb er achtsam angewandt werden sollte (vgl. Embrechts et al. 1997; Moscadelli 2004).

Weitere Schätzer, die aber eine größere Datenbasis voraussetzen, sind der von

Pickands und der von Dekkers, Einmal und de Haan. Für eine Darstellung wird auf Embrechts et al. (1997) verwiesen.

Nach Schätzung der Parameter muss je nach Anwendungsfall von den bedingten Verteilungen  $F_{(u)}$  bzw.  $F_{[u]}$  auf die unbedingte Verlustverteilung geschlossen werden.

Nach Auflösen der Definition 3.1.4 ergibt sich

$$F(x) = F(u) + [1 - F(u)]F_{(u)}(x - u) \quad \text{für } u \leq x < x_F .$$

Die einzige unbekannte Größe der rechten Seite ist  $F(u)$ . Da unterhalb des Schwellenwertes  $u$  annahmegemäß ausreichend viele Beobachtungen vorliegen, kann zur Schätzung die empirische Verteilung herangezogen werden.

Für die Beobachtungen  $x_1, \dots, x_n$  gilt

$$F_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq u\}} = \frac{n - n_u}{n} .$$

$n_u$  bezeichnet dabei die Anzahl der Verluste, die über dem Schwellenwert liegen.

Damit folgt

$$\begin{aligned} F(x) &\approx 1 - \left(\frac{n_u}{n}\right) + \left(\frac{n_u}{n}\right) F_{(u)}(x - u) \\ &= 1 - \left(\frac{n_u}{n}\right) [1 - F_{(u)}(x - u)] \\ &= 1 - \left(\frac{n_u}{n}\right) \left[1 + \frac{\xi(x-u)}{\beta}\right]^{-1/\xi} \\ &= 1 - \left[1 + \left(\frac{n_u}{n}\right)^{-\xi} \left(\frac{\xi(x-u)}{\beta}\right) + \left(\frac{n_u}{n}\right)^{-\xi} - 1\right]^{-1/\xi} \\ &= 1 - \left[1 + \left(\frac{n_u}{n}\right)^{-\xi} \left(\frac{\xi(x-u) + \beta - \beta\left(\frac{n_u}{n}\right)^\xi}{\beta}\right)\right]^{-1/\xi} \\ &\quad \text{für } u \leq x < x_F . \end{aligned}$$

Mit  $\sigma = \beta \left(\frac{n_u}{n}\right)^\xi$  und  $\mu = u + \frac{\beta}{\xi} \left[\left(\frac{n_u}{n}\right)^\xi - 1\right]$  folgt

$$F(x) \approx G_{\xi, \mu, \sigma}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \quad \text{für } u \leq x < x_F .$$

Die Approximation  $G_{\xi, \mu, \sigma}$  der Flanke von  $F$  ist daher ebenfalls eine GPD-Verteilung. Der Gestaltparameter ist gleich dem der Exzessverteilung. Die Parameter  $\sigma$  und  $\mu$  werden über die entsprechenden Parameter der Exzessverteilung bestimmt. Wird im ersten Schritt die bedingte Verteilung  $F_{[u]}$  nach Coleman (2003) geschätzt, so muss in der Formel für den Lageparameter  $u$  durch den Schätzwert  $\mu$  ersetzt werden.

Für Risikomaße, die sich auf ein Verlustereignis beziehen, also das Ausmaß eines Verlustes beziffern, kann die Approximation des Verteilungsendes ausreichend sein. So lässt sich der VaR zu hohen Konfidenzniveaus aus der approximierten Verteilung berechnen.

Für die spätere Aggregation zu einer Verteilung des Gesamtschadens muss aber die gesamte Verteilung approximiert werden. Wenn davon ausgegangen werden kann, dass unterhalb des Schwellenwertes ausreichend Verlustereignisse vorliegen, kann die Approximation der Verteilung unterhalb der Schwelle über die empirische Verteilung erfolgen. Ein rein parametrischer Ansatz kann ebenfalls verfolgt werden. Dazu wird zusätzlich eine Verteilung an die Verluste unterhalb der Schwelle angepasst. Hier können klassische Verteilungen gute Ergebnisse liefern (vgl. Moscadelli 2004). Sollte dieser Ansatz gewählt werden, so sollte die Schätzung von  $F(u)$  beim Rückschluss auf die unbedingte Verlustverteilung (für das obere Verteilungsende) auf der geschätzten Verteilung beruhen. In beiden Fällen ist die Verknüpfung der Verteilungen unter- und oberhalb des Schwellenwertes unproblematisch, da die Werte beider Verteilungen an  $u$  gleich sind.

Wird die empirische Verteilung  $F_n$  für die Approximation unterhalb der Schwelle gewählt, ergibt sich

$$F(x) \approx F_n(x)1_{\{x \leq u\}} + G_{\xi, \mu, \sigma}(x)1_{\{x > u\}} .$$

Zur Approximation von Verlustverteilungen besonders im Bereich operationeller Risiken ist die GPD insgesamt besser geeignet als die im vorherigen Abschnitt behandelte GEV. Durch die für eine Anwendung der GEV notwendige Blockbildung wird die meist ohnehin kleine Datenbasis weiter verringert. Die GPD bezieht dagegen alle Verluste oberhalb einer bestimmten Schwelle in die Betrachtung ein.

Das beschriebene Problem der Anpassung des Bezugszeitraums tritt im Fall der GPD nicht auf. Der Rückschluss von der Exzessverteilung auf die eigentliche Verlustverteilung ist unproblematisch, und der Übergangspunkt zum Endbereich und damit der Gültigkeitsbereich der Approximation sind durch Schätzungen bekannt. Dadurch kann sie gut mit einer Approximation für den Anfangsbereich der Verteilung kombiniert werden und anschließend in die Aggregation zum Gesamtschaden eingehen. Die GEV kann dagegen nur eine grobe Abschätzung geben, deren Ungenauigkeit mit zunehmender Faltungszahl zunimmt.

Zwar kann über die Maximumverteilung der GEV auf die Verlustverteilung geschlossen werden, jedoch reduziert die an sich unproblematische Vorgehensweise über Aggregation die Datenmenge erneut und ist daher ungeeignet. Die Kombination der GEV mit einer Approximation für den Verteilungsanfang erfordert die willkürliche Festsetzung des Übergangspunktes. Die Schätzung würde dem Grundproblem der Bestimmung des Schwellenwertes für die GPD entsprechen, wäre aber im Gegensatz dazu nicht theoretisch fundiert. Daher lohnt der zusätzliche Aufwand im Vergleich zur Anwendung der GPD nicht.

Ein weiterer Vorteil der GPD-Methode zeigt sich in der Behandlung von Abhängigkeiten der Verlusthöhen von externen Einflüssen, wie der Zeit oder

Geschäftszyklen. Da einzelne, extreme Verlustereignisse betrachtet werden, können die Parameter in Abhängigkeit zu den Einflussfaktoren modelliert werden.

Die GEV hat bei auf den Bezugszeitraum aggregierten Daten den Vorteil, dass sie Verlusthöhen und -häufigkeiten nicht getrennt betrachtet. Daher kann sie bei ausreichend großer Datenmenge Anwendung finden, wenn eine getrennte Modellierung nicht gewünscht ist. Auch ist sie für andere Anwendungsgebiete wie die im vorherigen Abschnitt dargestellte hydrologische Anwendung besser geeignet.

**Überprüfung des Modells:** Bereits vor der Modellierung kann durch Abtragen der empirischen Exzessmittelwertfunktion (SMEF) über verschiedenen Schwellenwerten überprüft werden, ob eine Approximation mit einer GPD-Verteilung sinnvoll erscheint. Nähert sich der Graph am Ende einer Geraden an, so ist eine Approximation mit Hilfe einer GPD-Verteilung möglich, da nur GPD-Verteilungen eine lineare Exzessmittelwertfunktion aufweisen (vgl. Reiss und Thomas 2001). Der Graph kann dann auch zur Festlegung geeigneter Schwellenwerte dienen.

Ein QQ-Plot kann dazu dienen, erste Anhaltspunkte auf die Gestalt des Verteilungsendes zu erhalten. Generell stellt ein QQ-Plot die Quantile zweier Verteilungen gegenüber und ermöglicht so einen Vergleich. Folgt der Graph der Winkelhalbierenden, so stimmen die Verteilungen überein. Eine andere Gerade spricht dafür, dass sich die Verteilungen nur in Lage- und Skalenparameter unterscheiden.

Soll überprüft werden, ob vorliegende Daten aus einer Verteilung stammen, muss zunächst eine parameterfreie Schätzung der Verteilung der Daten erfolgen. Im Allgemeinen wird für geordnete Daten  $x_{1,n}, \dots, x_{j,n}, \dots, x_{n,n}$

$$p_{j,n} = \frac{n - j + 0,5}{n}$$

angenommen. Der QQ-Plot für die Daten und die Verteilung  $F$  ergibt sich dann aus

$$(x_{j,n}, F^{-1}(p_{j,n})) \quad \text{für } j = 1, \dots, n .$$

Zur Abschätzung der Gestalt der Flanke wird ein QQ-Plot mit der Exponential-Verteilung ( $\xi = 0$ ) erstellt. Eine Gerade weist auf eine Exponential-Verteilung hin. Folgen die Daten einer langsamer abfallenden Dichte ( $\xi > 0$ ), ergibt sich eine konkave Abweichung von einer Geraden. Im Gegensatz dazu spricht eine konvexe Abweichung für eine Verteilung mit schneller abfallender Dichte ( $\xi < 0$ ).

Zur Überprüfung nach der Modellierung können verschiedene Methoden zum Einsatz kommen. Bei den allgemeinen Anpassungstests sind vor allem der Kolmogoroff-Smirnow- und der Anderson-Darling-Test zu nennen, die auf die Exzesse angewendet werden.

Speziell für den Fall der GPD können die von Davison (1984) vorgeschlagenen W-Statistiken angewandt werden. Sie sind definiert als

$$W_i = \frac{1}{\xi} \log \left( 1 + \frac{\xi y_i}{\beta} \right).$$

Dabei bezeichnen  $\xi$  und  $\beta$  die Parameter der Verteilung der Exzesse  $y_i$ . Sind die Exzesse iid verteilt mit der angenommenen GPD-Verteilung, so sind die W-Statistiken exponentialverteilt mit  $\lambda = 1$ .

Die W-Statistiken können als Punktwolke über der Zeit abgetragene Hinweise auf systematische Abweichungen, z.B. das Vorliegen eines Trends, geben, die nicht im Modell berücksichtigt wurden. Über einen ML-Verhältnistest kann überprüft werden, ob die W-Statistiken exponentialverteilt sind. Alternativ dazu kann die Überprüfung graphisch über einen QQ-Plot erfolgen. Wenn das Modell richtig ist, liegen die W-Statistiken annähernd auf der Winkelhalbierenden.

Über einen ML-Verhältnistest, in dem eine angepasste Exponential-Verteilung ( $\xi = 0$ ) gegen die geschätzte GPD-Verteilung getestet wird, kann zusätzlich überprüft werden, ob die Daten signifikant für eine Verteilung sprechen, deren Dichte schneller bzw. langsamer abfällt als die der Exponential-Verteilung.

Das *Backtesting* erlaubt eine Überprüfung des Modells in der Wirklichkeit. Da der VaR zum Niveau  $\alpha$  dem  $\alpha$ -Quantil der Verlustverteilung entspricht, wird ein Verlust den VaR mit der Wahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$  überschreiten. Bei  $n$  Verlusten ist die erwartete Anzahl der Überschreitungen daher  $(1 - \alpha)n$ . Die tatsächliche Anzahl der Überschreitungen sollte die theoretisch erwartete zumindest nicht überschreiten. Das Backtesting kann nach der Modellierung über die historischen Daten oder im Laufe der Zeit über neue Verlustfälle erfolgen.

### 3.1.2 Verlusthäufigkeitsverteilungen

Im vorangegangenen Abschnitt wurden die Verlusthöhen einzelner Verlustereignisse modelliert. Um Risiken über einen zeitlichen Horizont zu bestimmen, ist es zusätzlich notwendig, die Häufigkeit der Ereignisse zu betrachten. Dazu werden diskrete Verteilungen, vor allem Poisson- oder negative Binomial-Verteilungen, an die Daten, d.h. die Anzahl der Ereignisse pro Zeiteinheit, angepasst. Wie im kontinuierlichen Fall der Verlusthöhenverteilung, können verschiedene Methoden zur Parameterschätzung zur Anwendung kommen. Die in Anhang B aufgeführten Methoden lassen sich direkt auf den diskreten Fall übertragen.

Im einfachsten Fall kann die Wahrscheinlichkeit für eine Anzahl von Verlustereignissen über die Binomial-Verteilung modelliert werden. Dazu muss die Verlustwahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine Transaktion einen Verlust hervorruft, geschätzt werden. Zusätzlich muss die Anzahl aller

Transaktionen bekannt sein oder für die Zukunft geschätzt werden. Da sich diese Schätzung oft problematisch gestaltet, und da für ausreichend kleine  $p$  die Binomial-Verteilung gut durch die Poisson-Verteilung approximiert werden kann, bietet sich die Poisson-Verteilung an, für die nur ein Parameter zu schätzen ist.

Der Erwartungswert und die Varianz einer Poisson-Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda$  sind beide  $\lambda$ . Ist die Häufigkeit der Verlustereignisse stärker gestreut, so bietet sich die negative Binomial-Verteilung an.<sup>15</sup> Chapelle et al. (2005) untersuchen tatsächliche Verlustdaten und kommen zu dem Schluss, dass für die Bestimmung des Risikos für eine Halteperiode von einem Jahr eine Poisson-Verteilung ausreichend gute Ergebnisse liefert.

Poisson- und negative Binomial-Verteilungen lassen sich besonders leicht falten, was von Bedeutung ist, wenn der Zeithorizont der Risikobetrachtung nicht mit dem der Häufigkeitsmessung übereinstimmt. Die Summe von zwei unabhängig Poisson-verteilten Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  mit den Parametern  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ist ebenfalls Poisson-verteilt mit dem Parameter  $(\alpha_1 + \alpha_2)$  (vgl. Waldmann und Stocker 2004).

Die Summe zweier unabhängiger, negativ Binomial-verteilter Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  mit den Parametern  $r_1$  bzw.  $r_2$  und dem gleichen Parameter  $0 < p < 1$  ist ebenfalls negativ Binomial-verteilt mit den Parametern  $(r_1 + r_2)$  und  $p$  (vgl. Hipp 2001).

Zur Anpassung an den Betrachtungszeitraum muss daher nur jeweils ein Parameter mit der Länge des Zeitraums multipliziert werden. Zu beachten ist dabei, wann die Messungen erfolgt sind. Wurde z.B. davon ausgegangen, dass Verluste nur an Werktagen auftreten können, und wurde die Häufigkeit dem entsprechend nur an Werktagen gemessen, so ist auch die Länge in Werktagen zu wählen, d.h. für ein Jahr ca. 260 Tage.

Beide Verteilungen gehören der Panjer-Klasse an. Für Verteilungen dieser Klasse existieren Rekursionsformeln zur Summation, über die die Aggregation der Verlusthöhen und -häufigkeiten über einen effizienten Algorithmus möglich ist (siehe Abschnitt 3.1.3).

Soll nur die Häufigkeit der Ereignisse modelliert werden, deren Verlusthöhe einen Schwellenwert  $u$  überschreiten, so bietet sich die Poisson-Verteilung an. Bezeichnet  $F$  die Verlusthöhenverteilung, so ist die Anzahl der Verlustereignisse über  $u$  Binomial-verteilt mit  $p = 1 - F(u)$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schwellenwert überschritten wird, ist bei ausreichend hoch gewählten Schwellen gering. Damit ist die Poisson-Verteilung als Modell gerechtfertigt (vgl. Reiss und Thomas 2001).

Problematisch dabei ist, dass die extremen Ereignisse, also die, deren Verluste eine hohe Schwelle überschreiten, von Natur aus selten sind. Wurden die vorliegenden Daten in relativ kurzen Zeitfenstern erhoben, kann nicht davon

---

<sup>15</sup>Die negative Binomial-Verteilung entsteht durch die Annahme, dass die Intensität eines Poisson-Prozesses einer Gamma-Verteilung folgt.

ausgegangen werden, dass die Häufigkeit über die empirischen Daten richtig modelliert werden kann.

Interessant ist die Stabilität der Poisson-Verteilung gegenüber einer Anhebung des Schwellenwertes von  $u$  auf  $v > u$ , wenn  $F$  GPD-verteilt ist. Sie ermöglicht die Schätzung der Häufigkeit von Ereignissen über einer Schwelle, über der nur wenige oder keine Beobachtungen vorliegen. Man geht dabei von einer Schwelle  $u$  aus, die hoch genug ist, um eine Approximation der Verlusthöhen über die GPD zu rechtfertigen, gleichzeitig aber noch ausreichend Beobachtungen über  $u$  vorliegen, um aussagefähige Parameterschätzungen zu ermöglichen. Ist der Parameter  $\lambda_u$  der Häufigkeit von Verlusten über der Schwelle  $u$  bestimmt, kann die Häufigkeit der Ereignisse oberhalb von  $v$  über  $\lambda_u$  bestimmt werden.

Es sei die Häufigkeit der Verluste mit einer Höhe über  $u$  durch eine Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda_u$  modelliert.  $\lambda_u$  kann dabei über die Anzahl der Verluste  $N_u(T)$  über  $u$  im Zeitraum  $T$  durch  $\lambda_u = \frac{N_u(T)}{T}$  geschätzt werden. Die Exzesse über  $u$  seien durch die GPD-Verteilung  $F_{(u)}$  mit den Parametern  $\xi$  und  $\beta$  approximiert.<sup>16</sup> Eine Erhöhung des Schwellenwertes von  $u$  nach  $v$  stellt eine Verdünnung des entsprechenden Poisson-Prozesses dar. Für die Intensität gilt daher

$$\lambda_v = \lambda_u \cdot q .$$

Dabei  $q$  bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass der Verlust eines Ereignisses, dessen Verlust  $u$  überschreitet, ebenfalls die Schwelle  $v$  überschreitet. Daher gilt

$$q = 1 - F_{[u]}(v) = 1 - F_{(u)}(v - u) = \left( 1 + \frac{\xi(v - u)}{\beta} \right)^{(-1/\xi)} .$$

Dabei sind  $\xi$  und  $\beta$  die Parameter der GPD, die für die Überschreitung von  $u$  geschätzt wurden.

Alternativ kann das Problem kurzer Datenhistorien mit einer unzureichenden Anzahl von Datenpunkten zur Modellierung der Häufigkeiten extremer Ereignisse durch die Einbindung externer Daten gemindert werden. Problematisch dabei ist die eventuell notwendige Anpassung der Daten (Skalierung). Die Einbindung externer Daten ist nach Basel II explizit erforderlich und wird daher gesondert in Abschnitt 3.1.5 behandelt.

### 3.1.3 Gesamtverlustverteilung

Nachdem Häufigkeit und Verlusthöhen getrennt modelliert sind, muss nun eine Aggregation zu einer Gesamtschadenverteilung erfolgen. Aus dieser werden die Risikomaße und die Eigenkapitalanforderung berechnet. Die getrennte Modellierung und spätere Verknüpfung zu einem bewerteten Prozess bereiten keine Probleme. Die Bestimmung der Parameter kann, wie in Embrechts und Chavez-Demoulin (2004) dargestellt, getrennt erfolgen.

<sup>16</sup>Das Modell lässt sich analog im Falle der bedingten Verlustverteilung  $F_{[u]}$  anwenden.

Sind die Verlusthöhen  $X_i$  und -häufigkeiten  $N(t)$  voneinander unabhängig und sind die Verlusthöhen iid verteilt mit  $G$ , so ergibt sich die Gesamtschadenverteilung

$$F_{S(t)}(x) = P(S(t) \leq x) = P\left(\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] \leq x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(N(t) = i)G^{(i)}(x) .$$

Hierbei bezeichnet  $G^{(i)}$  die  $i$ -fache Faltung von  $G$  mit  $G^{(0)}(x) = 1$  für  $x \geq 0$  und  $G^{(0)}(x) = 0$  für  $x < 0$ . Selbst in einfachen Modellen stellt die Berechnung von  $F_{S(t)}$  eine Schwierigkeit dar und ist oft analytisch nicht möglich. Daher werden Verfahren zur Näherung der Gesamtschadenverteilung angewendet. Zwei der meist verwendeten Methoden stellen die Simulation und die Panjer-Rekursion dar, die im Folgenden dargestellt werden. Andere Methoden sind Approximationen wie die Edgeworth-Expansion oder Inversionsmethoden wie die schnelle Fourier-Transformation (FFT) (vgl. Embrechts et al. 2003).

Erwartungswert und Varianz der Gesamtschadenverteilung lassen sich im Gegensatz dazu bei Unabhängigkeit der Höhe und der Häufigkeit und Existenz der Erwartungswerte und Varianzen leicht berechnen. Der Erwartungswert ist durch

$$E[S(t)] = E(X) \cdot E[N(t)]$$

und die Varianz durch

$$Var[S(t)] = Var(X) \cdot E[N(t)] + E(X)^2 \cdot E[N(t)]$$

gegeben (vgl. Waldmann und Stocker 2004).

Der erwartete Gesamtschaden muss gemäß Basel II nicht in die Kapitalanforderung mit einbezogen werden, wenn er angemessen in den Produktpreisen berücksichtigt wird.

Versicherungen bestimmen über den Erwartungswert die Nettorisikoprämie, wobei die Exzessverteilung über den Schwellenwert der Selbstbeteiligung als Verlusthöhen- bzw. Schadenverteilung dient. Entsprechend werden nur die Häufigkeiten der Verluste über der Schwelle betrachtet. Moscadelli (2004) errechnet über diesen Ansatz mit dem 99,9%-Quantil als Schwellenwert Risikomaße für einzelne Geschäftsbereiche. Für die Berechnung der Eigenkapitalanforderung einer Bank ist dieser Ansatz jedoch nicht ausreichend, da Verluste unterhalb der gewählten Schwelle nicht in die Betrachtung einfließen. Im Gegensatz zu Versicherungen sind diese Verluste von der Bank zu tragen und sind bei einer hoch gewählten Schwelle nicht unerheblich. Die Anforderung in Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004), die Verluste zu einem 99,9%-Quantil zu bestimmen, bezieht sich nicht auf die Verteilung der Verlusthöhen sondern auf die Gesamtschadenverteilung. Die implizite Annahme, dass die extremen Verluste das Verteilungsende allein bestimmen, ist in der

Anwendung, vor allem mit Blick auf die Häufigkeiten geringerer Verluste, zu überprüfen. Allerdings genügt der Ansatz, um die Risikoverteilung auf einzelne Geschäftsbereiche zu berechnen und die Risikogewichtung im Standardansatz (STA) seitens der Aufsicht zu validieren. Anzumerken ist, dass Moscadelli (2004) statt der erwarteten Verlusthöhe den Median verwendet, da in den GPD-Approximationen sieben der acht Geschäftsbereiche einen Gestaltparameter  $\xi > 0$  aufweisen und die Erwartungswerte nicht existieren. Für Mediane gilt aber die obige Berechnungsvorschrift bei Faltung nicht, weshalb das verwendete Risikomaß nur als abstrakt angesehen werden kann.

**Simulation:** Bei der Simulation werden zur Approximation der Gesamtschadenverteilung zunächst eine zufällige Anzahl  $m$  von Verlustereignissen aus der Verlusthäufigkeitsverteilung und anschließend  $m$  Verluste  $x_1, \dots, x_m$  aus der Verlusthöhenverteilung generiert und addiert. Die Summe

$$s = \sum_{i=1}^m x_i$$

wird als eine Ziehung aus der Gesamtschadenverteilung aufgefasst.  $k$ -mal wiederholt ergibt sich eine Stichprobe  $s_1, \dots, s_k$  des Gesamtschadens. Über die empirische Verteilung

$$F_n(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 1_{\{s_i \leq x\}}$$

als Näherung der Gesamtschadenverteilung können Risikomaße wie der VaR geschätzt werden. Die Schätzer sind als Ergebnisse eines Zufallsexperiments selbst Zufallsvariablen. Daher ist ein Punktschätzwert wenig aussagekräftig, und die Streuung der Ergebnisse ist ebenfalls zu betrachten.

Dazu wird in  $n$  Simulationsläufen jeweils ein Schätzwert des zu bestimmenden Risikomaßes ermittelt, deren Ergebnisse  $Q_1, \dots, Q_n$  wiederum als Stichprobe von iid Zufallsvariablen aufgefasst werden. Nach dem Gesetz der großen Zahlen ergibt sich der Mittelwert  $\bar{Q}$  als Schätzer des Risikomaßes:

$$\bar{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i .$$

Für ausreichend viele Simulationsläufe ist  $\bar{Q}$  nach dem zentralen Grenzwertsatz approximativ normalverteilt und die Varianz ergibt sich zu

$$\text{Var}(\bar{Q}) = \frac{1}{n} \text{Var}(Q) ,$$

wenn  $Q$  wie jedes  $Q_i$  verteilt ist. Da die Verteilung von  $Q$  unbekannt ist, wird die Varianz über

$$\widehat{\text{Var}}(Q) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2$$

geschätzt.

Für eine vorgegebene Überdeckungswahrscheinlichkeit  $\alpha$  lässt sich damit das Konfidenzintervall von  $\bar{Q}$

$$\left[ \bar{Q} - z_{(1-\alpha)/2} \sqrt{\frac{\widehat{Var}(Q)}{n}}; \bar{Q} + z_{(1-\alpha)/2} \sqrt{\frac{\widehat{Var}(Q)}{n}} \right]$$

schätzen.  $z_{(1-\alpha)/2}$  bezeichnet dabei das  $(1 - \alpha)/2$ -Quantil der Standardnormalverteilung. Aus dem Konfidenzintervall lässt sich für eine vorgegebene maximale Intervallbreite  $L$  die minimal benötigte Anzahl von Simulationsläufen  $n$  bestimmen:

$$n = \frac{4z_{(1-\alpha)/2}^2 \widehat{Var}(Q)}{L^2} .$$

Da die Ermittlung der benötigten Simulationsläufe auf der Schätzung der Stichprobenvarianz beruht, die mit zunehmender Anzahl  $n$  genauer wird, wird ein iteratives Verfahren angewendet. Es wird eine minimale Anzahl  $n_1$  als Startwert festgelegt und nach der Simulation die minimal benötigte Anzahl  $n$  von Läufen geschätzt. Ist  $n_1 \leq n$ , so werden zusätzlich  $n_2 = n - n_1$  Läufe durchgeführt. Das Vorgehen wird wiederholt, bis die benötigte Anzahl von Simulationsläufen erreicht ist.

Aus der Darstellung ist der Hauptnachteil der Simulation ersichtlich: Es werden unter Umständen sehr viele Simulationsläufe benötigt, um zu einer guten Schätzung des Risikomaßes zu gelangen. Um die Standardabweichung des Schätzwertes zu halbieren, muss die Anzahl der Läufe vervierfacht werden. In jedem Lauf ist wiederum eine Vielzahl von Zufallszahlen zu generieren. In der Praxis lohnen daher varianzreduzierende Verfahren, um die benötigte Anzahl von Simulationsläufen zu vermindern. Beispielsweise kann über antithetische Verfahren die Varianz um bis zu 90% reduziert werden. Eine Darstellung solcher Methoden findet sich z.B. in Pötzelberger (2006).

Der entscheidende Vorteil der Simulation ist neben der einfachen Implementation ihre Flexibilität. Vor allem können nicht-stationäre Prozesse einfach modelliert werden. Dies ermöglicht die Modellierung von Abhängigkeiten der Verlusthöhen und -häufigkeiten. In Abschnitt 3.1.4.1 wird näher erläutert, wie Abhängigkeiten von exogenen Variablen, z.B. zeitliche Trends, modelliert werden können. Ebenfalls können durch die Abbildung der Verlusthöhe in Abhängigkeit der Verlusthäufigkeit Reaktionen der Bank auf entstandene Verluste berücksichtigt werden. Beispielsweise ist eine Absenkung der erwarteten Verlusthöhe nach Eintritt des ersten Verlustereignisses denkbar. Auch für eine einfache, aber genaue Modellierung von Versicherungen ist die Simulation geeignet. Die generierten Verluste werden dabei den Policen entsprechend modifiziert. Auf diese Art und Weise können verschiedenste Versicherungsarten modelliert werden (vgl. Hartung 2003).

**Panjer-Rekursion:** Häufigkeitsverteilungen, deren Wahrscheinlichkeitsmassen  $p_n = P(N = n)$  sich durch

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1$$

mit reellen  $a$  und  $b$  rekursiv darstellen lassen, gehören der Panjer-Klasse an. Nur Poisson-, negative Binomial- und Binomial-Verteilungen erfüllen diese Eigenschaft.

Liegt eine Häufigkeitsverteilung der Panjer-Klasse vor und ist die Verlusthöhenverteilung nur auf den positiven ganzen Zahlen definiert, so kann die Gesamtschadenverteilung durch den Panjer-Algorithmus bestimmt werden. Es gilt

$$P(S(t) = k) = \sum_{m=1}^k \left(a + \frac{bm}{k}\right) f_X(m) P(S(t) = k - m) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Dabei bezeichnet  $f_X(m) = P(X = m)$  die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion der Verlusthöhenverteilung.<sup>17</sup>

Im Fall einer Poisson-Verteilung als Modell für die Verlusthäufigkeiten gilt  $a = 0$  und  $b = \lambda$ . Damit folgt

$$P(S(t) = k) = \left(\frac{\lambda t}{k}\right) \sum_{m=1}^k m f_X(m) P(S(t) = k - m) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Da nach Voraussetzung  $f_X(0) = 0$ , gilt weiter  $P(S(t) = 0) = e^{-\lambda t}$ .

Eine kontinuierliche Verlusthöhenverteilung muss erst in eine diskrete Verteilung überführt werden. Die einfachste Methode dazu ist das Runden der Verluste und entsprechende Anpassung der Wahrscheinlichkeiten. Eine andere Möglichkeit, die gute Ergebnisse liefert, ist das Gleichsetzen der Momente mit denen einer diskreten Verteilung (vgl. Embrechts et al. 2003).

Bei der Festlegung der Schrittweite der Diskretisierung ist zwischen gegensätzlichen Zielen abzuwägen. Zum einen bestimmt sie den Rechenaufwand, zum anderen die Genauigkeit der Gesamtschadenverteilung und damit der berechneten Risikomaße. Bei der praktischen Implementierung des Panjer-Algorithmus können außerdem numerische Probleme auftreten. Schon im ersten Schritt kann die Wahrscheinlichkeit für kein auftretendes Verlustereignis fälschlicherweise mit  $P(N(t) = 0) = P(S(t) = 0) = 0$  beziffert werden, wenn  $\lambda t$  genügend groß ist. In diesem Fall kann durch Multiplizieren beider Seiten der obigen Gleichung mit einer Konstanten die Funktionsweise des Algorithmus sichergestellt werden.

Für das Abbruchkriterium wird die kumulierte Wahrscheinlichkeit  $\sum_{k=0}^u P(S(t) = k)$  im Lauf  $u$  benötigt. Werden die einzelnen Wahrscheinlichkeiten  $P(S(t) = u)$  für hohe  $u$  sehr klein, so kann bei einfacher Addition der

<sup>17</sup>Vgl. Embrechts et al. (2003).

Wahrscheinlichkeit auf die im letzten Lauf ermittelte kumulierte Wahrscheinlichkeit  $\sum_{k=0}^{u-1} P(S(t) = k)$  ein Rundungsfehler auftreten, so dass die errechnete kumulierte Wahrscheinlichkeit der im letzten Lauf ermittelten gleicht. Entsprechend müssen Maßnahmen bei der Implementierung getroffen werden, damit Rundungsfehler umgangen werden und die Abbruchbedingung erreicht wird.

### 3.1.4 Modellierungsprobleme

In den vorangegangenen Abschnitten wird stets davon ausgegangen, dass, wenn auch wenige, noch ausreichend viele Daten für die Modellierung vorliegen. In der Praxis ist dies unter Umständen nicht der Fall. Die Anwendung eines Verlustverteilungsansatzes setzt deshalb die Ergänzung durch externe Daten oder aus Expertenbefragungen gewonnene Szenarien voraus. Die Einbindung dieser Daten ist jedoch nicht unproblematisch. Da die Einbindung externer Daten und Experteneinschätzungen explizit im Akkord gefordert wird, erfolgt die Behandlung der Datenprobleme gesondert in Abschnitt 3.1.5 und 3.1.6.

Während die unterstellte Unabhängigkeit der Verlusthöhen von der Häufigkeit sicherlich für die aggregierten Verluste nicht aufrechtzuerhalten wäre, ist die Annahme für Einzelrisiken in einzelnen Geschäftsbereichen unproblematisch (vgl. Alexander 2003b).

Darüberhinaus liegt den Modellen stets die Annahme zugrunde, dass sowohl die Verlusthöhen als auch die Anzahl von Verlusten in einem Zeitintervall Realisationen von iid Zufallsvariablen sind. Die starke Kontextabhängigkeit operationeller Verluste spricht dafür, dass dies in der Realität nicht der Fall ist. Externe Einflussfaktoren, wie z.B. Geschäftszyklen, Managementmaßnahmen und Regulierung, beeinflussen Verlusthöhen und -häufigkeiten. Während oft lokale Abhängigkeiten vorliegen, sind Abhängigkeiten von Verlusten, die weit auseinander liegen, weniger häufig. Die Modelle müssen daher an nicht-iid Daten angepasst werden, was in den nächsten Abschnitten kurz dargestellt wird.

#### 3.1.4.1 Abhängigkeiten der Beobachtungen: Trends und saisonale Einflüsse

Sowohl die Häufigkeit von Verlusten als auch die Verlusthöhe können Trends im Zeitverlauf aufweisen. Die Betrachtung ist nicht nur für die Modellierung von operationellen Risiken wichtig, das Vorliegen eines Trends ist auch für das Risikomanagement von Bedeutung. Deshalb sollten Trendanalysen auch Eingang in das Berichtssystem finden.

Hinweise auf Trends können z.B. Scatterplots der Verlusthöhen oder Zwischenankunftszeiten der Verluste geben. Ein Autokorrelogramm der Verlusthöhen bzw. der Zwischenankunftszeiten der Verluste gibt Anhaltspunkte über

mögliche Abhängigkeiten. Zusätzlich können die in Abschnitt 3.1.1.4 eingeführten W-Statistiken und ein QQ-Plot der Zwischenankunftszeiten im Vergleich mit einer Exponentialverteilung herangezogen werden, um Trends oder andere Einflüsse zu erkennen.

Bei Vorliegen eines Trends bestehen prinzipiell zwei mögliche Vorgehensweisen: Einerseits können die Daten um Trendeinflüsse bereinigt werden und anschließend in die Modelle einfließen, andererseits können die Modelle angepasst werden, um Trends zu berücksichtigen. Im Folgenden wird gezeigt, welche Anpassungen zur Modellierung von Trends notwendig sind.

Trends in der Häufigkeit der Verlustereignisse können im Poisson-Modell über einen inhomogenen Poisson-Prozess modelliert werden. Die Intensität  $\lambda(t)$  ist dabei eine deterministische Funktion der Zeit. Die Bestimmung der Parameter der Funktion kann dabei einfach durch Ersetzen des ursprünglichen Parameters  $\lambda$  durch die Funktion in der ML-Methode erfolgen. Das Vorgehen wird in Anhang B dargestellt.

Kann die Annahme von iid verteilten Verlusthöhen aufrechterhalten werden, genügt die Bestimmung der Parameter der Intensitätsfunktion. Für den Rest des Modells ist keine Anpassung nötig. Zur Bestimmung der Gesamtschadenverteilung eines festen Zeitraums wird die kumulierte Intensität  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$  gebildet. Für zwei Zeitpunkte  $0 < s < t$  gilt,  $N(t) - N(s)$  ist Poisson-verteilt mit Parameter  $\Lambda(t) - \Lambda(s)$  (vgl. Waldmann und Stocker 2004). Die Intensität des ursprünglichen Modells wird daher durch die Differenz der kumulierten Intensitäten ersetzt.

Die Einbeziehung von Trends der Verlusthöhen in das Modell erfolgt ähnlich. Die Parameter des ursprünglichen Modells werden durch Funktionen der Zeit ersetzt und ihre Parameter über die ML-Methode bestimmt. Allerdings muss nun die Aggregation zur Gesamtschadenverteilung über die Simulation erfolgen, da die Einbindung in die anderen dargestellten Verfahren nicht möglich ist (vgl. Embrechts et al. 2003). In der Simulation wird für jede Zeiteinheit eine zufällige Anzahl von Verlusten aus der Häufigkeitsverteilung gezogen. Anschließend werden entsprechend viele Verluste aus der Verlusthöhenverteilung bestimmt, deren Parameter über die zuvor bestimmten Funktionen ermittelt werden. Das Vorgehen kann analog angewandt werden, wenn sowohl für Verlusthöhen als auch für die Häufigkeit ein Trend vorliegt. Eine detaillierte Darstellung zur Einbindung von Trends und ein Anwendungsbeispiel finden sich in Smith (1989).

Saisonale Einflüsse lassen sich ebenfalls auf die dargestellte Weise modellieren. Die Funktionen der Parameter sind entsprechend zu wählen. Allerdings sind zur Bestimmung der saisonalen Einflüsse und damit der Funktionsparameter längere Datenhistorien notwendig, die im Umfeld operationeller Risiken kaum vorliegen dürften.

Zu beachten bei der Überprüfung auf Vorliegen eines Trends ist der *Survival Bias*. Banken haben erst kürzlich begonnen, Verluste aus operationellen Risiken ganzheitlich und konsistent zu erfassen. Daten aus früheren Jahren

können daher zugunsten hoher Verluste verzerrt sein, da kleine Verluste kaum erfasst wurden und heute nicht mehr bekannt sind. Das gleiche Problem stellt sich bei der Verwendung externer Daten. Oft werden dabei Verluste aus öffentlichen Quellen in die Datenbanken eingearbeitet. Banken sind bemüht, operationelle Verluste nicht an die Öffentlichkeit gelangen zu lassen und nur große Verluste erregen die öffentliche Aufmerksamkeit. Dadurch kann es zu einem vermeintlichen Abwärtstrend in den Verlusthöhen und einer zunehmenden Häufigkeit kommen.

### 3.1.4.2 Lokale Abhängigkeiten: Cluster

Ein häufig beobachtetes Problem in Zeitreihen aller Art ist das Auftreten von Clustern, d.h. das Zusammenfallen mehrerer, meist hoher Beobachtungen aufgrund lokaler Abhängigkeiten. Dies ist in Finanzzeitreihen am Beispiel von empirischen Börsendaten leicht nachvollziehbar. Mehrere dicht nebeneinander liegende Beobachtungen sind durch ein Ereignis bedingt und es kommt zu lokalen Abhängigkeiten. Auch im Falle operationeller Risiken treten Cluster auf: Ein Beispiel ist ein EDV System, das zu Zeiten niedriger Auslastung kaum Fehler verursacht, während sich in Zeiten starker Auslastung die Fehler häufen.

Die gängige Vorgehensweise geht auf Davison und Smith (1990) zurück. Um weiterhin ein Poisson-Prozess-Modell anwenden zu können, betrachten sie nur die Maxima der einzelnen Cluster. Während dieses Vorgehen in anderen Anwendungen Sinn macht, muss im Falle operationeller Risiken eine Anpassung erfolgen, da die sonst nicht betrachteten Verluste nicht unerheblich sein können. Die einfachste Möglichkeit dazu ist, statt der Maxima der geclusterten Verluste ihre Summe in die Betrachtung einzubeziehen.

Während das allgemeine Vorgehen weitgehend akzeptiert ist, gibt es verschiedene Ansätze zur Bestimmung der Cluster. Davison und Smith (1990) stellen ein Markov-Ketten-Modell auf. Die Zustände der (nicht beobachteten) Markov-Kette  $\Lambda(t)$  repräsentieren hierbei die möglichen Umweltzustände, z.B. hohe oder niedrige Auslastung. Die Übergangsraten seien  $\lambda$  und  $\mu$ . Die Beobachtungszeiten bilden einen von  $\Lambda$  bedingten Poisson-Prozess mit Intensität  $\phi\Lambda(t)$ . Die Zeiten zwischen dem Auftreten der Beobachtungen sind nach Grandell (1976) iid verteilt mit der Dichte

$$f(z) = \frac{\phi}{\alpha_1 - \alpha_2} ([\mu + \phi - \alpha_2]e^{-\alpha_1 z} - [\mu + \phi - \alpha_1]e^{-\alpha_2 z}), \quad z > 0,$$

wobei  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die positiven und eindeutigen Lösungen der Gleichung

$$\alpha^2 - (\lambda + \mu + \phi)\alpha + \lambda\phi = 0$$

sind. Mit Hilfe numerischer ML Schätzung können nun  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\phi$  bestimmt werden. Um Beobachtungen Clustern zuzuordnen, wird die theoretisch erwartete Clusterlänge pro Zeiteinheit  $z^*$  nach

$$z^* = \frac{\mu}{\mu + \phi}$$

bestimmt. Zwei aufeinander folgende Beobachtungen zu den Zeitpunkten  $T_i$  und  $T_{i+1}$  werden demselben Cluster zugeordnet, wenn  $T_{i+1} - T_i < z^*$ , d.h. wenn der zeitliche Abstand ihres Auftretens kleiner als die erwartete Clusterlänge ist.

Allerdings weisen Davison und Smith (1990) daraufhin, dass in vielen Fällen nur wenig durch die Anwendung des komplexen Modells gewonnen wird. Sie führen einige Fälle an, in denen es sich gezeigt hat, dass die Ergebnisse nicht sensitiv gegenüber der gewählten Clusterlänge sind. Die Schätzung kann daher intuitiv erfolgen. Das dargestellte Vorgehen wird als Run-Methode bezeichnet.

Eine explizite Modellierung von lokalen Abhängigkeiten nehmen McNeil und Frey (2000) vor. Statt der Modellierung über einen Poisson-Prozess, stellen sie ein GARCH Zeitreihenmodell für logarithmierte Gewinne von Aktienkursen auf. Um die hohe Wölbung abzubilden, wird das Rauschen als GPD-verteilt angenommen. Das Modell kann einfach auf operationelle Verluste übertragen werden. Kritisch bei der expliziten Modellierung der lokalen Abhängigkeiten ist allerdings die benötigte Datengrundlage, um das Clusterverhalten zu bestimmen.

### 3.1.4.3 Weitere Modellierungsmöglichkeiten

Wie bereits erwähnt können auch andere Faktoren als die Zeit die Verlusthöhen und -häufigkeiten beeinflussen. Beispiele sind die Zahl der Mitarbeiter oder die durchschnittliche Verweildauer der Mitarbeiter in der Bank. Der Einfluss dieser Risikotreiber kann ebenfalls über Abhängigkeiten der Parameter der Verlustverteilung von den Faktoren modelliert werden. Die Schwierigkeit liegt vor allem in der Identifizierung der Risikofaktoren. Weitere Alternativen zur Modellierung der Risikotreiber werden in Abschnitt 3.1.7 aufgezeigt.

Die Anzahl der Verlustereignisse wird in den vergangenen Abschnitten als Poisson-Prozess modelliert. In diesem Rahmen kann die Intensität auch als Zufallsvariable modelliert werden oder selbst einem stochastischen Prozess folgen. Der erste Fall stellt einen gemischten Poisson-Prozess dar. Die negative Binomial-Verteilung erwächst aus der Mischung eines Poisson-Prozesses mit einer Gamma-Verteilung. Der zweite Fall ist als Cox-Prozess bekannt. Ist die Intensität abhängig von verschiedenen Systemzuständen, kann die Modellierung über ein Markov-Ketten-Modell erfolgen. Weiterführende Angaben finden sich in Waldmann und Stocker (2004) und Anwendungen auf operationelle Risiken in Cruz (2002) oder McNeil et al. (2005).

### 3.1.5 Datenprobleme und Einbindung externer Daten

Werden interne Daten zur Kalibrierung eines Verlustverteilungsansatzes verwendet, so bildet das Modell die Eigenarten der Bank gut ab und ist als

risikosensitiv anzusehen. Problematisch ist die Kalibrierung nur auf Basis interner Daten, da die systematische Erfassung operationeller Verluste in den meisten Banken erst seit kurzem erfolgt. Die Anforderungen an die fortgeschrittenen Ansätze (AMA) verlangen aber eine Erfassung auch der Verluste, die erwartungsgemäß nur einmal in 1000 Jahren auftreten. Gerade die das Risiko entscheidend bestimmenden hohen Verluste, die selten auftreten, werden in kurzen Datenhistorien nur unzureichend abgebildet. Im Sinne der Kontextabhängigkeit kann auch in Zukunft bei ausreichend langen Datenhistorien nicht davon ausgegangen werden, dass die auf Basis ausschließlich interner Daten kalibrierten Modelle das tatsächliche Risiko einer Bank ausreichend abbilden.

Mögliche Abhilfe kann die Einbindung externer Daten schaffen, die der Basler Akkord für die AMA explizit vorschreibt. Mögliche Quellen sind zum einen öffentlich bekannte Verlustereignisse, die in einigen kommerziellen Datenbanken erfasst werden. Zum anderen haben sich Banken zu Konsortien zusammengeschlossen, die die Verlustereignisse ihrer Mitglieder sammeln und den einzelnen Mitgliederbanken zur Verfügung stellen. Da hier die Daten von den einzelnen Banken stammen, ist es wichtig sicherzustellen, dass die Verluste einheitlich und ganzheitlich erfasst werden. Die Diskretion muss ebenfalls gewährleistet werden. Beispiele für Datenpooling-Konsortien sind die *Operational Riskdata eXchange Association* (ORX) oder die *Global Operational Loss Database* (GOLD).

Bei der Einbindung ergibt sich das Problem, dass die externen Daten für die Bank relevant und homogen zu den internen Daten sein müssen. Geht man davon aus, dass Banken in vergleichbarer Weise operationellen Risiken ausgesetzt sind (Relevanz der Daten), so bleiben zwei Probleme bestehen: Die Daten müssen dem Risikoprofil der Bank in Höhe und Häufigkeit der möglichen Verluste angepasst werden (Skalierung). Dabei wird meist auf die Größe der Bank als Indikator des Risikoprofils zurückgegriffen. Zusätzlich muss die Erfassungsgrenze der externen Daten berücksichtigt werden, wenn sie, wie in den meisten Fällen, sehr viel höher liegt als die interne Bagatellgrenze.

Kritiker der Einbeziehung externer Daten glauben dagegen, dass Verlustdaten anderer Banken für ein Institut von Relevanz sind, da gerade operationelle Risiken stark von den Strukturen der Organisation abhängen (vgl. z.B. Currie (2004)). Cruz (2002) schlägt deshalb vor, an Standorten, für die wenige Verlustdaten vorliegen, Daten aus anderen Standorten der Bank einzubinden. Er begründet dies mit der zumindest ähnlichen Unternehmenskultur innerhalb einer Organisation. Während dies für einzelne Risiken sinnvoll erscheint, lässt das Beispiel Rechtsrisiken Zweifel an der Annahme aufkommen. Rechtliche Risiken sind in der Definition des Basler Ausschusses explizit in den operationellen Risiken eingeschlossen. Unterschiedliche Gesetze und Rechtspraktiken an verschiedenen Standorten können aber erhebliche Auswirkungen auf Verlusthäufigkeiten und die Höhe der Verluste zur Folge haben. Da die Kritik auf die Relevanz der Daten abzielt, bleibt die Problema-

tik der Anpassung der Daten bestehen, auch wenn dieses Vorgehen gewählt wird.

Wird nicht davon ausgegangen, dass externe Daten nach einer Anpassung für das Institut relevant sind und somit nicht in das Modell eingefügt werden sollen, kann die Einbindung auch über Szenarien erfolgen. In Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004) wird diese Möglichkeit explizit angesprochen. Dazu sollen externe Daten in die Entwicklung von Szenarien einbezogen werden. Die Einbindung von Expertenmeinungen wird in Abschnitt 3.1.6 behandelt. Zur Einbindung externer Daten sind wieder Häufigkeit der Verluste und Verlusthöhen zu unterscheiden. Im Folgenden wird zunächst auf die Einbindung externer Daten in die Kalibrierung der Verlusthöhenverteilung eingegangen, bevor im Anschluss die Einbindung zur Bestimmung der Häufigkeiten erörtert wird.

### **3.1.5.1 Einbindung externer Daten in die Kalibrierung der Verlusthöhenverteilung**

Shih et al. (2000) untersuchen den Zusammenhang zwischen der Größe eines Instituts, gemessen am Ertrag, den Aktiva und der Mitarbeiterzahl, und der Höhe operationeller Risiken auf Basis von Verlustdaten der OpVaR-Datenbank von PricewaterhouseCoopers. Sie stellen einen nicht-linearen Zusammenhang mit allen Größenindikatoren nach

$$L = S^\alpha r$$

fest.  $L$  bezeichnet die Verlusthöhe,  $S$  einen Größenindikator und  $r$  einen multiplikativen Rest, der nicht durch die Größe erklärt wird. Der Skalierungsfaktor  $\alpha$  ist vor der Einbindung aus den externen Verlustdaten zu bestimmen. Die untersuchten Daten zeigen Abhängigkeiten zwischen der Größe der Residuen und der Größe der Bank (Heteroskedastie), weshalb die Parameter über die Methode gewichteter kleinster Quadrate bestimmt wurden. Der Erklärungsgrad des Modells ist mit knapp 10% gering. Dies ist zum einen durch Unterschiede im inhärenten Risiko der Banken aufgrund unterschiedlicher Geschäftstätigkeiten, zum anderen durch Qualitätsunterschiede im Management und der Kontrollumgebung zu erklären. Während die Unterschiede im zugrundeliegenden Risiko durch die ausschließliche Einbeziehung heterogener Verlustdaten umgangen werden kann, gestaltet sich eine objektive Einbeziehung der Qualitätsunterschiede in die Skalierung schwierig. Gerade die schwierige objektive Bewertung der Qualität und die einfache Bestimmung von Größenindikatoren sind Gründe, weshalb die Skalierung externer Daten vor allem über Größenindikatoren, meist über den Ertrag, erfolgt. Hartung (2003) schlägt ein ähnliches Modell vor, in dem die Möglichkeit der Verwendung negativ mit der Verlusthöhe korrelierter Indikatoren besteht. Für positiv korrelierte Indikatoren gleicht sein Vorgehen dem hier vorgestellten. Er weist ebenfalls auf die Notwendigkeit hin, Skalierungsfaktoren auf

Ebene der einzelnen Risiken zu bestimmen. Da externe Daten mit den Skalierungsfaktoren erfasst werden müssen, um die Skalierung und Einbindung zu ermöglichen, muss die Identifizierung der relevanten Faktoren innerhalb der Konsortien erfolgen. Die Skalierung öffentlich bekannter Verluste ist dabei auf Faktoren beschränkt, die ebenfalls öffentlich zugänglich sind.

In Shih et al. (2000) ergibt sich ein  $\alpha < 1$ , d.h. die Verlusthöhe wächst langsamer als linear zum Indikator der Größe der Bank. Dies ist im Hinblick auf den niedrigen Erklärungsgrad des Modells zwar wenig beachtlich, aber die Ergebnisse decken sich mit den Erkenntnissen von de Fontnouvelle et al. (2004). In dem Vergleich der Verlusthöhenverteilungen von sechs Banken vergleichbarer Größe ergeben sich nur geringe Unterschiede. Daher gehen de Fontnouvelle et al. (2004) davon aus, dass Banken in Gruppen homogener Größe wenig Qualitätsunterschiede im Risikomanagement und der Kontrollumgebung aufweisen. Die Skalierung der Daten zur Einbeziehung in die Kalibrierung der Verlusthöhenverteilung wird aus diesem Grund weniger wichtig erachtet als die Skalierung der Verlusthäufigkeiten.

Nach dem festgestellten Zusammenhang zwischen Größenindikator und Verlusthöhe ergibt sich für die externen Daten  $(L_i, S_i)$  das lineare Regressionsmodell

$$\frac{\ln(L_i)}{\ln(S_i)} = \alpha + \beta \frac{1}{\ln(S_i)} + \epsilon_i .$$

Die Skalierung der Daten erfolgt nach Bestimmung der Parameter durch

$$L_i^s = L_i \left( \frac{S}{S_i} \right)^\alpha .$$

$L_i^s$  bezeichnet die skalierten Verluste und  $S$  den Größenindikator der Bank. Eine Anwendung und Einbindung in ein Praxisbeispiel findet sich in Chapelle et al. (2005).

Die Integration der skalierten Daten kann auf verschiedene Weise erfolgen. Alexander (2003b) passt separat Verteilungen den internen und externen Daten an, und fügt diese über das Bayes'sche Theorem zusammen.<sup>18</sup> Die Bayes'sche Statistik geht davon aus, dass der Parametervektor  $\theta$  eines Zufallsexperiments selbst eine Zufallsvariable ist. Die Verteilung des Schätzers  $\hat{\theta}$  wird aus den externen Daten geschätzt und bildet die sogenannte *a priori*-Verteilung. Im Folgenden sei die *a priori*-Dichte mit  $g(\theta)$  bezeichnet. Die internen Daten werden als zusätzliche Information angesehen, und es wird die Likelihood-Funktion  $f(x_1, \dots, x_n | \theta)$  gebildet. Die bedingte Dichte  $g(\theta | x_1, \dots, x_n)$  wird als *a posteriori* bezeichnet und ergibt sich aus

$$g(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n | \theta) g(\theta)}{\int_{\Theta} f(x_1, \dots, x_n | y) g(y) dy} .$$

<sup>18</sup> Alexander (2003b) nimmt keine vorherige Skalierung der Verlustdaten vor.

$\Theta$  bezeichnet dabei den Parameterraum. Der Bayes'sche Schätzer ist der Erwartungswert der a posteriori-Verteilung.<sup>19</sup>

Noch nicht betrachtet wurde die Tatsache, dass externe Datenbanken eine Verzerrung zugunsten hoher Verluste aufweisen. In Datenbanken, die ihre Daten aus veröffentlichten Verlusten beziehen, liegt dies daran, dass geringe Verluste in der Öffentlichkeit kaum beachtet werden, und dass Banken daran gelegen ist, möglichst keine Informationen über entstandene Verluste zu publizieren. Solche Datenbanken erfassen daher nur sehr hohe Verluste. OpVantage erfasst nach eigenen Angaben Verluste über \$1 Millionen. Nach einer Skalierung der Daten können Verluste auch unterhalb der Erfassungsgrenze liegen. Chapelle et al. (2005) skalieren daher auch die Erfassungsgrenze selbst. Jedoch muss beachtet werden, dass eine Skalierung der Erfassungsgrenze wiederum zu Datenproblemen führt. Verluste von Instituten aller Größen werden mit der gleichen Erfassungsgrenze gesammelt. Eine Skalierung resultiert für die verschiedenen Institute in unterschiedlichen Erfassungsgrenzen. Soll, wie in Chapelle et al. (2005) nur eine Erfassungsgrenze verwendet werden, so muss diese der skalierten Erfassungsgrenze für das kleinste Institut entsprechen. Andernfalls sollte die Erfassungsgrenze als stochastisch angesehen werden.

Datenpooling-Initiativen versuchen dagegen, alle Verluste ab einer relativ niedrigen Grenze zu erfassen. ORX erfasst Verluste ab einer Höhe von \$10.000. Probleme können hier auftreten, wenn die Angaben lediglich beabsichtigt sind und einzelne Banken den Beteuerungen zum Trotz nicht alle Verluste oder nur Verluste oberhalb einer höheren Grenze an die Datenkonsortien melden. In diesem Fall kann dem Problem durch eine als stochastisch angesehene Erfassungsgrenze begegnet werden.

Soll die Modellierung der externen Daten über eine Verteilung der Extremwerttheorie erfolgen, so muss der Schwellenwert  $u$  entweder durch die Erfassungsgrenze bekannt sein oder aus den Daten geschätzt werden.<sup>20</sup> Als problematischer erweist sich der Rückschluss auf die unbedingte Verlustverteilung, da zusätzlich  $F(u)$  geschätzt werden muss. Wird davon ausgegangen, dass externe und interne Daten homogen sind, so kann die Schätzung von  $F(u)$  über die internen Daten erfolgen.

Sollen hingegen klassische, parametrische Verteilungen an die externen Daten angepasst werden, so muss die Erfassungsgrenze im Modell berücksichtigt werden. Chapelle et al. (2005) wählen diesen Ansatz, während sie die internen Daten über die empirische Verteilung und eine GPD-Verteilung modellieren.

---

<sup>19</sup>Formal minimiert der Bayes'sche Schätzer den erwarteten Schaden bzgl. einer gewählten Schadensfunktion und der a posteriori-Verteilung. Für die quadratische Schadensfunktion ergibt sich als Schätzer der Erwartungswert der a posteriori-Verteilung (vgl. Alexander 2003b).

<sup>20</sup>Die gemeinsame Modellierung interner und externer Daten über eine Verteilung der Extremwerttheorie ist wegen der unterschiedlichen Schwellenwerte nicht möglich.

Dieser Ansatz bietet sich an, wenn eine ausreichende Anzahl externer Daten vorliegt, so dass die durch die Extremwerttheorie vollzogene Extrapolation im Bereich externer Daten nicht nötig ist. de Fontnouvelle et al. (2004) merkt dazu an, dass GPD-Modelle Verteilungsenden in besonders hohen Quantilen überschätzen, weshalb sie bei großen Datenmengen keine Anwendung finden sollten. Das Modell unterscheidet drei Bereiche der Verlusthöhenverteilung: Im ersten Abschnitt liegen kleine und mittlere Verluste, für die ausreichend viele interne Daten vorliegen, um sie über die empirische Verteilung zu modellieren. Der zweite Bereich liegt unterhalb der Erfassungsgrenze externer Datenquellen. Wegen der geringen Anzahl interner Datenpunkte findet die Extremwerttheorie Anwendung. Oberhalb der Erfassungsgrenze liegen mit den externen Daten wieder ausreichend Beobachtungen vor, so dass klassische Verteilungen an die Daten angepasst werden können.

Baud et al. (2002) entwickeln drei Ansätze zur Modellierung der Erfassungsgrenze externer Daten. Die Ansätze unterscheiden sich darin, dass die Erfassungsgrenze als konstant und bekannt, als konstant aber unbekannt oder als stochastisch angenommen wird. Den Ansätzen liegt die Annahme zu Grunde, dass externe und interne Daten der gleichen Verteilung  $F(x, \theta)$  mit Parameter  $\theta$  folgen. Die externen Daten werden aber nur über einer Verlusthöhe  $H$  erfasst.  $f(x, \theta)$  bezeichne die Verlustdichte. Im Fall einer konstanten und bekannten Erfassungsgrenze ergibt sich für externe Daten die Dichte

$$f^*(x, \theta) := 1_{\{x \geq H\}} \frac{f(x, \theta)}{1 - F(H, \theta)} .$$

Daraus ergibt sich für externe und interne Daten die log-Likelihood-Funktion

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i, \theta)) + \sum_{i=1}^{n^*} \ln(f^*(x_i^*, \theta)) .$$

$x_1, \dots, x_n$  bezeichnen die internen,  $x_1^*, \dots, x_{n^*}^*$  die externen Verluste.

Unter der Annahme einer konstanten aber unbekanntenen Erfassungsgrenze wird  $H$  als zusätzlicher Parameter über die ML-Schätzung bestimmt. Der resultierende Schätzer  $\hat{H} = \min_i(x_i^*)$  bestimmt den kleinsten externen Verlust. In der Untersuchung von Baud et al. (2002) zeigte sich das Problem, dass externe Daten durch wenige niedrige Verlustdaten verunreinigt sein können, so dass die Schätzung vermutlich falsche Ergebnisse liefert. Sie wenden daher ein iteratives Verfahren an: Für jedes  $H$  im Bereich  $[0, \max_i(x_i^*)]$  wird  $\theta$  geschätzt, wobei nur die über  $H$  liegenden Daten in die Schätzung eingehen. Danach wird der jeweilige Schätzwert  $\hat{\theta}$  über  $H$  abgetragen. Der kleinste Wert, ab dem der Graph relativ stabil bleibt, wird als Erfassungsgrenze gewählt.

Dieser Ansatz lässt sich einfach auf den Fall übertragen, wenn interne und externe Daten über verschiedene Verteilungen modelliert werden. Dazu muss

lediglich die log-Likelihood-Funktion auf die externen Daten beschränkt aufgestellt werden:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n^*} \ln(f^*(x_i^*, \theta)) .$$

Auf diese Weise kann die so gewonnene Verteilung der Parameterschätzer ebenfalls über die Bayes'sche Statistik mit den internen Daten nach Alexander (2003b) kombiniert werden.

Baud et al. (2002) entwickeln ebenfalls eine Methodik zur Modellierung einer stochastischen Erfassungsgrenze. Sie kommen zu dem Ergebnis, dass wenn fälschlicherweise eine konstante aber unbekannte Grenze unterstellt wird, aber tatsächlich eine stochastische Grenze vorliegt, lediglich weniger Daten in die Kalibrierung einbezogen werden. Da das Ergebnis aber stark von der Annahme der Verteilungsfamilie der Grenze abhängt, empfiehlt es sich, die dargestellte Methodik für eine unbekannte konstante Grenze anzuwenden. Daher wird hier auf eine Darstellung des Verfahrens bei stochastischen Grenzen verzichtet.

Okunev (2005) kritisiert die Methode von Baud et al. (2002) wegen des hohen benötigten Rechenaufwands bei großen Datenmengen. Beschränkt auf den Fall, dass interne und externe Verluste durch die gleiche Verteilung modelliert werden, schlägt er zwei Alternativen vor, deren Implementierungen auf einfachste Weise erfolgen. Um die Verzerrung zugunsten hoher Verluste auszugleichen, werden die niedrigeren Verluste in beiden Ansätzen stärker gewichtet. Für eine als bekannt vorausgesetzte Erfassungsgrenze externer Verlustdaten  $H$  erfolgt die Gewichtung über die relative Anzahl der internen Verlustereignisse mit Verlusten unter  $H$  zur Anzahl der internen und externen Verluste oberhalb der Grenze. Liegen  $n$  interne Verlustereignisse vor, von denen  $k$  einen Verlust unterhalb von  $H$  aufweisen, und liegen  $n^*$  externe Verluste über der Grenze vor, so ergibt sich die Gewichtung  $G$  aus

$$G = \frac{n - k + n^*}{n - k} .$$

Die erste Vorgehensweise besteht darin, eine neue Stichprobe zu generieren, in der alle Verluste unterhalb der Grenze  $G$ -mal aufgenommen werden, während die Verluste oberhalb der Grenze jeweils einmal auftreten. Die zweite Möglichkeit setzt voraus, dass die Anpassung der Verlustverteilung über eine Momentenmethode erfolgt. Dabei werden zur Bestimmung der Momente die Verluste unterhalb der Grenze mit  $G$  gewichtet, während die Verluste über der Grenze einfach gewichtet in die Berechnung eingehen. Die zweite Methode hat gegenüber der ersten den Vorteil, dass  $G$  keine ganze Zahl sein muss.

Eine weitere Alternative schlagen Haubenstock und Hardin (2003) vor. Sie nehmen ebenfalls für externe und interne Verluste die gleiche Verteilung

an. Die Verlustverteilung einer Risikoklasse, d.h. Risikotyp-Geschäftsfeld-Kombination, für die ausreichend interne Daten vorliegen, dient zur Bestimmung der Verteilungen anderer Klassen, für die keine oder wenige interne, aber ausreichend externe Daten vorliegen. Es wird die Annahme getroffen, dass Verluste der betrachteten Klassen Verteilungen aus der gleichen Familie folgen, die sich nur durch ihre Parameter unterscheiden. Die Klasse mit ausreichender interner Datenmenge bezeichnet man als Bezugsklasse.

Für alle Klassen werden Verteilungen an die externen Daten angepasst und deren Momente bestimmt. Das Verhältnis der Momente der Bezugsklasse zu den Momenten der übrigen Zellen dient als Ausgangspunkt für die Schätzung der Momente der internen Verlustverteilungen. Die Verteilung der Bezugsquelle wird aus den internen Daten geschätzt und im Anschluss deren Momente bestimmt. Durch Multiplikation des Verhältnisses der Momente der externen Verteilungen mit den Momenten der internen Verteilung der Bezugsklasse approximiert man die Momente der internen Verlustverteilungen der übrigen Klassen. Über die Momentenmethode werden dann die Parameter der internen Verteilungen geschätzt.

### 3.1.5.2 Einbindung externer Daten in die Kalibrierung der Verlusthäufigkeit

Viele Autoren gehen davon aus, dass sich Unterschiede zwischen Banken, gerade im Risikomanagement und der Kontrollumgebung, vor allem auf die Verlusthäufigkeit auswirken (vgl. z.B. Moscadelli (2004) oder Frachot und Roncalli (2002)). Ergebnisse eines Vergleichs von sechs großen, international tätigen Banken in de Fontnouvelle et al. (2004) bestätigen dies.

Liegt nur eine kurze Datenhistorie vor, so kann eine niedrige Schadensanzahl Ausdruck des guten Risikomanagements und damit des niedrigen tatsächlichen Risikos einer Bank oder aber Zufall bzw. Glück sein. Frachot und Roncalli (2002) vergleichen die Problematik mit der von Versicherungen, die bei Abschluss einer Police das Risiko des Abschließenden ohne persönliche Daten schätzen müssen. Um eine faire Prämie zu bestimmen, muss dem individuellen Risiko Rechnung getragen werden. Daher werden in der Kreditabilitätstheorie im Laufe der Zeit neue Informationen in Form der persönlichen Schadenshistorie berücksichtigt. Je länger die Schadenshistorie, desto mehr spiegelt die Prämie das tatsächliche Risiko des Versicherten wieder.

Frachot und Roncalli (2002) übertragen den Ansatz auf operationelle Risiken und gehen dabei von einem Poisson-Prozess aus, in dem die Intensität  $\lambda$  ein Maß für das Risiko der Bank darstellt.  $\lambda$  ist selbst eine nicht-beobachtbare Zufallsvariable, aber die Schadenshistorie enthält Informationen über die Intensität. Frachot und Roncalli (2002) gehen von einer Gamma-Verteilung mit den Parametern  $a$  und  $b$  für  $\lambda$  aus. Damit ergibt sich die Dichte

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{a-1} e^{-\lambda/b}}{b^a \Gamma(a)} .$$

Die Wahrscheinlichkeit für  $N_t = n$  Schadensfälle in Periode  $t$  ergibt sich mit der Poisson-Annahme dann aus

$$P(N_t = n) = \int_0^\infty P(N_t = n|\lambda = t)f(t)dt = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)n!} (1+b)^{-a} \left(\frac{b}{1+b}\right)^n .$$

Die Startparameter  $a$  und  $b$  sollen dabei aus externen Daten z.B. über die ML-Methode bestimmt werden. Erwartungsgemäß kann dies allerdings nicht erfolgen, da aus Vertraulichkeitsgründen die Verluste der externen Datenbanken nicht den einzelnen Banken zuzuordnen sind. Als Alternative können die Parameter von der Aufsicht (oder dem Datenkonsortium) zur Verfügung gestellt oder über die durchschnittliche Schadenszahl und die Streuung bestimmt werden, wenn diese bekannt sind. Dazu werden der Erwartungswert und die Varianz von  $N_t$  in Relation zu den Parametern gesetzt und über den Durchschnitt und die Streuung geschätzt.

Die Einbindung der internen Schadensanzahl  $n_{t-1}$  der Vorperiode erfolgt über das Bayes'sche Theorem. Für die Intensität gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda|N_{t-1} = n_{t-1}) &= \frac{P(N_{t-1}=n_{t-1}|\lambda)f(\lambda)}{\int_0^\infty P(N_{t-1}=n_{t-1}|\lambda=t)f(t)dt} \\ &= \frac{\lambda^{n_{t-1}}e^{-\lambda} \lambda^{a-1}e^{-\lambda/b}}{n_{t-1}! \frac{b^a \Gamma(a)}{b^a \Gamma(a)}} \\ &= \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)n!} (1+b)^{-a} \left(\frac{b}{1+b}\right)^n \\ &= \frac{\lambda^{a-1+n_{t-1}}e^{-\lambda b/(1+b)}}{\left(\frac{b}{1+b}\right)^{a+n_{t-1}} \Gamma(a+n_{t-1})} . \end{aligned}$$

Mit  $a_1 = a + n_{t-1}$  und  $b_1 = \frac{b}{b+1}$  folgt

$$f(\lambda|N_{t-1} = n_{t-1}) \frac{\lambda^{a_1-1}e^{-\lambda/b_1}}{b_1^{a_1} \Gamma(a_1)} .$$

$\lambda$  ist demnach wieder Gamma-verteilt mit den Parametern  $a_1$  und  $b_1$ .

Auf diese Weise können sukzessiv neue Informationen eingebunden werden.

Für eine Datenhistorie der Länge  $k$  ergeben sich die Parameter

$$a_k = a + \sum_{i=1}^k n_{t-i}$$

und

$$b_k = \frac{b}{1+kb} .$$

Mit den neuen Parametern berechnet man die bedingte Wahrscheinlichkeit für  $n_t$  Schadensfälle dann durch

$$P(N_t = n|N_{t-1} = n_{t-1}, \dots, N_{t-k} = n_{t-k}) = \frac{\Gamma(a_k+n)}{\Gamma(a_k)n!} (1+b_k)^{-a_k} \left(\frac{b_k}{1+b_k}\right)^n .$$

Die bedingte erwartete Schadensanzahl

$$E(N_t|N_{t-1} = n_{t-1}, \dots, N_{t-k} = n_{t-k}) = \omega E(N_t) + (1-\omega) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=0}^k n_{t-i}\right)$$

mit

$$\omega = \frac{1}{1 + kb}$$

verdeutlicht dabei die Gewichtung der individuellen Schadenshistorie und dem Industrieschnitt. Je mehr interne Beobachtungen vorliegen, desto stärker fällt die Schadenshistorie ins Gewicht. Die unbedingte erwartete Schadensanzahl kann dabei als Benchmark für das Risikomanagement dienen.

Anzumerken ist, dass Frachot und Roncalli (2002) die Intensität in Abhängigkeit eines Indikators  $EI$ , z.B. des Ertrags, definieren. Die Intensität des Poisson-Prozesses ergibt sich demnach zu

$$\lambda' = \lambda \cdot EI .$$

Die Parameter müssen dementsprechend angepasst werden und ergeben sich aus

$$a'_k = a + \sum_{i=1}^k n_{t-k}$$

und

$$b'_k = \frac{b \cdot EI}{1 + kb \cdot EI} .$$

Alexander (2003b) geht einen anderen Ansatz zur Bestimmung der Verlusthäufigkeiten und Einbindung externer Daten. Sie geht von einer Anzahl  $N$  von Ereignissen, die operationelle Risiken bergen aus. Um eine zukunftsgerichtete Schätzung des operationellen Risikos zu erhalten, soll die Anzahl eine Prognose oder eine Zielvorgabe sein. Ein Beispiel ist die in einem Geschäftsbereich geplante Anzahl von Transaktionen, die dem betrachteten Risiko unterliegen. Diese Einbindung der Geschäftsumfeldfaktoren ist nach dem Basler Akkord explizit gefordert. Es ist allerdings nicht bestimmt, wo und in welcher Form die Einbindung zu erfolgen hat.

Um zu der Anzahl der Verlustereignisse zu gelangen, betrachtet Alexander die Wahrscheinlichkeit  $p$ , dass ein Ereignis einen Verlust hervorruft. Sie geht für  $p$  von einer Beta-Verteilung aus. Die Dichte

$$f(p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1}$$

hat den Träger  $[0, 1]$ .

Alexander bestimmt die Parameter  $a$  und  $b$  der externen und internen Daten getrennt über die ML-Schätzer. Die Parameterschätzer ergeben sich mit der Anzahl der gescheiterten Transaktionen  $n_f$  und der Anzahl aller Transaktionen  $n$  aus

$$a = n_f + 1$$

und

$$b = n - n_f + 1 .$$

Die aus internen und externen Daten bestimmten Verteilungen der Verlustwahrscheinlichkeit fügt Alexander (2003b) über das Bayes'sche Theorem zusammen.

Für die Kalibrierung über interne Daten ist dieses Vorgehen durchaus geeignet, der Anforderung zur Einbindung von Geschäftsumfeldindikatoren gerecht zu werden. Allerdings geht Alexander davon aus, dass die Verteilung von  $p$  auch aus den externen Daten bestimmt werden kann. Da aber nur Verlustereignisse erfasst werden, und die Anzahl der abgewickelten Transaktionen in den Datenbanken nicht vorliegt, ist dies unrealistisch. Die aus den externen Daten geschätzte Verteilung sollte den Banken daher seitens des Datenkonsortiums zur Verfügung gestellt werden.

### 3.1.6 Einbindung von Expertenmeinungen

Eine weitere Möglichkeit, den Mangel einer ausreichenden Verlusthistorie auszugleichen, ist die Einbindung von Expertenmeinungen. Ausgangspunkt ist die Annahme, dass die Experten in den betreffenden Geschäftsbereichen Kenntnisse über den Verlauf möglicher Verluste haben. Jedoch ist dieses Wissen meist zu ungenau, um eine Festlegung auf eine Verteilung zu rechtfertigen. Zusätzlich sind die Ergebnisse stark subjektiv geprägt und von der Qualifizierung der Experten abhängig. Neben einer sorgfältigen Auswahl der Experten muss die Organisation eine *no-blame*-Kultur entwickeln, um zu unverzerrten Ergebnissen zu kommen. Auch die Ausgestaltung des Fragebogens ist von entscheidender Bedeutung für die Qualität der Ergebnisse. Ansätze dazu finden sich in Anders (2003) und Anders und Sandstedt (2003).

Die Einbeziehung von Expertenmeinungen bietet weiter den Vorteil einer zukunftsgerichteten Evaluierung der Risiken. Im Gegensatz zu historischen Verlustdaten können und sollen Experten Veränderungen im Geschäfts- und Kontrollumfeld berücksichtigen. Vor allem aus diesem Grund wird die Einbeziehung von Expertenmeinungen im Basler Akkord explizit gefordert (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2004).

Wieder werden Schätzungen zur Verlusthöhe getrennt von den Aussagen zur Verlusthäufigkeit behandelt. Für die Verlusthöhenverteilung werden zum Teil direkt Datenpunkte über Szenarien mit den historischen Verlustdaten kombiniert und so in die Kalibrierung einbezogen. Dabei erfolgt allerdings keinerlei Gewichtung der objektiven Verlustdaten und der subjektiven Szenarien.

Alternativ dazu können die aus historischen Daten geschätzten Verteilungen der Parameter durch Expertenschätzungen über das Bayes'sche Theorem modifiziert. Die Vorgehensweise ist analog zu dem in Abschnitt 3.1.5.2 Verfahren zur Einbindung externer Daten zur Schätzung der Verlusthäufigkeit, kann aber auch für die Verlusthöhe herangezogen werden.

Die *a priori*-Verteilung der Parameter wird aus den Expertenaussagen gewonnen und wird weniger gewichtet, je mehr objektive Verlustdaten vorliegen. Die Festlegung der *a priori*-Verteilung über die erhobenen Fragebögen

ist nicht unproblematisch. Meist wird von einer konjugierten Verteilungsklasse ausgegangen, d.h. *a priori*- und *a posteriori*-Verteilung gehören der gleichen Verteilungsfamilie an. Zum Beispiel ist die Gamma-Verteilung die konjugierte Verteilung für den Parameter einer Poisson-Verteilung (vgl. Böker 2004). Für die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten bietet sich die Beta-Verteilung an (vgl. Abschnitt 3.1.5.2). Die Verwendung konjugierter Verteilungsklassen erleichtert die Berechnung der *a posteriori*-Verteilung, die sonst oft nur numerisch erfolgen kann. Zusätzlich werden durch die Einbeziehung neuer Beobachtungen bei Verwendung konjugierter Verteilungen nur die Parameter der Verteilung geändert werden. Die angenommene Verteilungsfamilie bleibt unverändert (vgl. Cruz 2002).

Weiter problematisch ist die Überführung der Angaben in den Fragebögen in eine Schätzung der Parameter bzw. ihrer Verteilung. Neben einem Punktschätzwert, z.B. die erwartete Anzahl an Verlusten, muss die Unsicherheit dieser Schätzung erhoben werden. Alexander (2003b) erhebt die erwartete Häufigkeit in Intervallen und zieht zur Festsetzung des Punktschätzwerts Szenarien aus dem Vergleich mit historischen Verlustdaten heran. Zur Schätzung der Unsicherheit der Verlusthöhen hält sie eine Erhebung der Standardabweichung für ungeeignet und schlägt stattdessen vor, den Abstand des Erwartungswerts zu hohen Quantilen in Vielfachen des Erwartungswertes zu erheben.

### **3.1.7 Einbindung von Faktoren des Geschäftsumfelds und der Kontrollumgebung**

Basel II verlangt neben der Berücksichtigung interner und externer Daten und Szenarien aus Expertenmeinungen explizit auch die Einbindung von Faktoren des Geschäftsumfelds und der internen Kontrollumgebung. Dies sind Faktoren, die das Risiko wesentlich beeinflussen und insofern Aufschluss über die Risikoentwicklung geben. Diese Risikotreiber sollen über geeignete Indikatoren in quantifizierbaren und im Zeitablauf zu beobachtenden Größen ausgedrückt werden. Die Berücksichtigung der Faktoren soll die Entwicklung der Umgebung widerspiegeln und die Risikomessung zukunftsorientiert gestalten.

Die eigentliche Einbindung in das Modell kann auf verschiedene Weise erfolgen. Die Skalierung interner und externer Daten, die in Abschnitt 3.1.5.1 beschrieben wurde, ist eine Form der Berücksichtigung. Eine andere Möglichkeit bietet die Modellierung der Verlusthäufigkeiten oder -höhen in Abhängigkeit der Faktoren. Alexander (2003b) modelliert nicht direkt die Verteilung Häufigkeit, sondern die Verteilung der Wahrscheinlichkeit einer fehlgeschlagenen Transaktion und verbindet diese mit der prognostizierten Anzahl der Transaktionen zu einer Häufigkeitsverteilung.

Auch die Parameter der Schadens- und Häufigkeitsverteilungen können in Abhängigkeit zu Faktoren der Geschäfts- und Kontrollumgebung bestimmt

werden. Dies geschieht analog zu der Berücksichtigung von Trends, in denen die Parameter in Abhängigkeit der Zeit modelliert werden. Das Vorgehen wird in Abschnitt 3.1.4.1 näher erläutert.

Eine nachträgliche Berücksichtigung durch die Anpassung der Kapitalanforderung aus einem Verlustverteilungsansatz wird in der Praxis oft über Scorecard-Ansätze realisiert. Nähere Erläuterungen hierzu finden sich in Abschnitt 3.4 und in Haubenstock und Hardin (2003).

### 3.1.8 Berücksichtigung von Versicherungen

Verlustminderungen durch Versicherungen dürfen in Rahmen der AMA von den Banken berücksichtigt werden. Auf einzelne Verlustfälle bezogene Versicherungen können auf einfache und zugleich genaue Weise im Rahmen der Simulation der Gesamtschadenverteilung aus der Verlusthöhe und -häufigkeit modelliert werden. (vgl. Hartung 2003). Eigenarten der Policen, wie Selbstbeteiligungen oder maximale Deckung, werden dabei direkt auf die einzelnen simulierten Verluste angewendet. Die so modifizierten Verluste gehen in die Verlusthöhenverteilung ein.

Versicherungen, die sich auf den Gesamtverlust einer Periode beziehen, z.B. *stop-loss*-Policen, können in der Simulation der Gesamtschadensverteilung der Bank, d.h. bei der Aggregation der Einzelrisiken, berücksichtigt werden. Die Aggregation zur Gesamtschadenverteilung der Bank wird in Abschnitt 3.2 erläutert.

Bei der Modellierung müssen eventuelle Zahlungsunsicherheiten berücksichtigt werden. Diese können aus Auslegungsstreitigkeiten, Zahlungsverzögerungen oder aus der Zahlungsunfähigkeit des Versicherers erwachsen.

Es gilt zu beachten, dass der Akkord die Minderung der Kapitalanforderung durch Versicherungen auf 20% begrenzt (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2004). Die Grenze wird vielfach mit der Begründung kritisiert, dass Anreize entfielen, Versicherungen mit einer Deckung über die Grenze hinaus abzuschließen (vgl. Zentraler Kreditausschuss 2001; Lawrence 2003). Die Grenze soll nach Ansicht des Ausschusses ein Polster gegen verzögerte Auszahlungen und rechtliche Streitigkeiten über den Versicherungsfall schaffen. Dies steht im Widerspruch zu den Anforderungen, die die Erfassung solcher Probleme im Modell vorschreiben.

Damit Versicherungen zur Minderung der Kapitalanforderung genutzt werden dürfen, muss der Versicherer bzw. die Police die im Folgenden erläuterten Eigenschaften erfüllen (vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2004; Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht 2005b). Die Zahlungsfähigkeit des Versicherers muss mindestens mit einem Rating von A oder einem vergleichbaren Rating bewertet werden. Der Vertrag muss mindestens eine Restlaufzeit von einem Jahr aufweisen. Ansonsten sind Abschläge vorzunehmen, um die sinkende Restlaufzeit zu berücksichtigen. Im Falle einer Restlaufzeit des Vertrags von weniger als 90 Tagen darf die Versicherung nicht

zur Minderung der Kapitalanforderung genutzt werden. Die Kündigungsfrist der Versicherung muss mindestens 90 Tage betragen. Andernfalls sind Abschlüsse vorzunehmen, um der kurzen Kündigungsfrist Rechnung zu tragen. Maßnahmen der Bankaufsicht dürfen nicht zum Versicherungsausschluss führen. Ebenfalls werden Versicherungen nicht anerkannt, wenn vertragliche Regelungen bei Insolvenz der Bank Zahlungen ausschließen, die sich auf Ereignisse vor der Insolvenz beziehen.

Um einen echten Risikotransfer zu erreichen muss die Versicherung außerdem von einer Drittpartei gewährt werden. Versicherungen die durch eine verbundene Unternehmung gewährt werden, müssen durch eine Rückversicherung abgesichert sein, die ihrerseits die hier genannten Anforderungen erfüllt.

Die Bank muss die Verfahren zur Minderung der Kapitalanforderung durch Versicherungen begründen, dokumentieren und offenlegen.

### **3.2 Aggregation der Einzelrisiken**

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich auf die Bestimmung des Risikokapitals einer Risikoklasse, d.h. einer Risikotyp-Geschäftsfeld-Kombination. Die Aggregation auf Institutsebene zur Bestimmung des gesamten von der Bank vorzuhaltenden Kapitals darf nach Basel II Korrelationen berücksichtigen, wenn die Aufsicht die Verfahren zu deren Ermittlung für angemessen hält. Andernfalls sind die einzelnen Kapitalanforderungen zu addieren, was der Annahme entspricht, die Risiken seien vollständig positiv korreliert. Dies entspricht dem schlimmstmöglichen Fall und intuitiv ist die Annahme für viele Risikotypen nicht haltbar. Empirische Daten untermauern Zweifel, dass operationelle Verluste systematisch im gleichen Jahr auftreten (vgl. Frachot et al. 2004).

Auch birgt die konservative Berechnungsweise über die einfache Summe die Gefahr, die vom Ausschuss beabsichtigte Kontinuität der Ansätze zu unterlaufen, da die resultierende Kapitalanforderung der fortgeschrittenen Ansätze (AMA) höher wäre als die über den Standardansatz (STA) berechnete Anforderung. Frachot et al. (2004) zeigen außerdem auf, dass die aus der Addition der Kapitalanforderung in Höhe des 99,9%-Quantils nur zweier unabhängiger Risikoklassen resultierende Gesamtkapitalanforderung bereits dem 99,9999%-Quantil der gemeinsamen Verlustverteilung entspricht. Je granularer die Risikomessung einer Bank erfolgt, desto höher ist die Kapitalanforderung bei fälschlicherweise unterstellter perfekter Korrelation. Der beabsichtigte Anreiz, eine granularere Risikomessung zu implementieren, wird daher umgekehrt.

Im Gegensatz zur Annahme der perfekten Korrelation würde die Annahme, die Risiken verschiedener Klassen wären unabhängig, das Risiko unterschätzen. Frachot et al. (2004) gehen nach empirischen Untersuchungen von einer Korrelation zweier Risiken im Bereich von 4% bis 10% aus. Die Ergebnisse

mit den Annahmen der perfekten Korrelation und der Unabhängigkeit können daher als Ober- bzw. Untergrenze der Kapitalanforderung dienen (vgl. Alexander 2003b).

In den folgenden Abschnitten wird zunächst ein Modell zur Berücksichtigung von Korrelationen zwischen Risikoklassen dargestellt. Die Vereinfachungen und Einschränkungen werden diskutiert. Im Vergleich ist die Modellierung von Abhängigkeiten über Kopulas überlegen und wird im Anschluss dargestellt.

### 3.2.1 Vereinfachendes Korrelationsmodell

Die Schätzung der Korrelationen der Risikoklassen aus empirischen Daten ist aufgrund der Datengrundlage zur Zeit sehr schwierig bis nahezu unmöglich. Lawrence (2003) geht davon aus, dass nur intuitive sinnvolle Annahmen über die Abhängigkeiten getroffen werden können. Korrelationsannahmen können über gemeinsame Risikotreiber abgeleitet werden (vgl. Alexander 2003b). Chapelle et al. (2005) kommen dagegen in empirischen Untersuchungen zu dem Ergebnis, dass sich Korrelationen wöchentlicher Verluste auf Jahresverluste übertragen lassen.

Die Korrelationen können über die Gesamtverluste der einzelnen Klassen, die Verlusthöhen oder die Verlusthäufigkeiten modelliert werden. Frachot et al. (2004) legen ein vereinfachendes Modell vor in dem Korrelationen der Gesamtverluste angenommen werden, die ausschließlich aus Korrelationen der Verlusthäufigkeiten der Klassen erwachsen. Sie legen dar, dass eine Modellierung von Korrelationen zwischen den Verlusthöhen verschiedener Klassen mit der grundlegenden Annahme von unabhängigen Verlusten innerhalb einer Risikoklasse unvereinbar ist.

Frachot et al. (2004) unterstellen in ihrem Modell implizit normalverteilte Verlusthöhen und Poisson-verteilte Häufigkeiten. Dies äußert sich in der Berechnungsweise der Korrelationen und der Aggregationsformel sowie in der Annahme, die multivariate Verteilung lasse sich allein durch Korrelationskoeffizienten (nach Bravais-Pearson) und die Randverteilungen beschreiben. Frachot et al. (2004) sehen dies als tolerierbare Vereinfachung und wenden das Modell auch auf Verteilungen mit langsam abfallenden Flanken an. Offensichtlich ist die Vereinfachung problematisch, wenn Verteilungen Verwendung finden, deren Varianz nicht existiert, da in diesem Fall der Korrelationskoeffizient nicht existiert. Hier sei auf die Ergebnisse von Moscadelli (2004) hingewiesen, die für nahezu alle Geschäftsfelder nach Basel II eine Verteilung mit nicht-existierender Varianz nahelegen. Interessant ist die Feststellung von Frachot et al. (2004), dass die Korrelation der Gesamtschäden umso geringer ausfällt, je größer die Varianz im Verhältnis zum quadrierten Erwartungswert ist. Mit den untersuchten empirischen Daten kommen Frachot et al. (2004) damit zu einem Korrelationskoeffizienten, der für keine Klasse mehr als 4% beträgt.

Weiter ist die Vereinfachung kritisch, da der Korrelationskoeffizient nur lineare Zusammenhänge abbildet. Für eine Beschreibung der gemeinsamen Verteilung reicht daher die Betrachtung der Randverteilungen und der Korrelationsmatrix im Allgemeinen nicht aus. Deshalb müssen andere mögliche Abhängigkeiten berücksichtigt werden (vgl. McNeil et al. 2005). Wegen der für die Praxis relevanten Ergebnisse über die Höhe der Korrelationen wird das Modell im Folgenden trotz der kritischen Vereinfachungsannahme dargestellt.

Werden die Verlusthöhen und -häufigkeiten in den einzelnen Klassen als unabhängig angenommen, so ergibt sich der Korrelationskoeffizient zweier Gesamtverluste  $S_1$  und  $S_2$  zu

$$\text{corr}(S_1, S_2) = \text{corr}(N_1, N_2) \frac{E(X)}{\sqrt{E(X^2)}} \frac{E(Y)}{\sqrt{E(Y^2)}}.$$

$N_1$  und  $N_2$  bezeichnen dabei die Verlusthäufigkeiten und  $X$  bzw.  $Y$  die Verlusthöhen zweier Risikoklassen. Die Korrelationsmatrix der Gesamtschäden lässt sich daher aus den Korrelationen der Verlusthäufigkeiten bestimmen. Kritisch bleibt dabei die empirische Ermittlung der Korrelationen der Häufigkeiten.

Frachot et al. (2004) zeigen weiter, dass eine zusätzliche Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Verlusthöhen und -häufigkeiten in den Klassen einen Anstieg der Korrelationen zwischen den Klassen bewirkt. Dabei gehen sie von einer bivariaten Poisson-Verteilung für je zwei Risikoklassen aus. Jedoch halten sie die Anwendung dieser Erweiterung in der Praxis für ungeeignet. Ihre Untersuchungen ergeben, dass die erwartete Korrelation zweier Klassen geringfügig auf 10% steigt.

Frachot et al. (2004) schlagen folgende vereinfachte Aggregationsformel für die Kapitalanforderung  $K$  auf Bankebene vor, die auf der Normalverteilungsannahme beruht:

$$K = \sum_{i=1}^H E(S_i) + \sqrt{\sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H \rho_{i,j} [K_i - E(S_i)][K_j - E(S_j)]}.$$

Dabei bezeichnet  $K_i$  die Kapitalanforderung der Klasse  $i$ , d.h. den VaR zum vorgegebenen Konfidenzniveau,  $\rho_{i,j}$  den Korrelationskoeffizienten der Klassen  $i$  und  $j$  und  $H$  die Anzahl der Risikoklassen.

Wegen der angesprochenen Kritikpunkte bietet die direkte Modellierung der Abhängigkeiten der Gesamtverluste der Risikoklassen mit Kopulas eine gute Alternative. Eine Kopula ist eine Verteilungsfunktion, die die Abhängigkeitsstruktur einer gemeinsamen Verteilung mehrerer Zufallsvariablen isoliert von den Randverteilungen beschreibt.

Im Folgenden werden zunächst der Begriff der Kopula formal definiert und einige Eigenschaften erläutert. Im Anschluss wird eine Auswahl von Kopulas dargestellt, bevor auf die Kalibrierung und Anwendung eingegangen wird.

### 3.2.2 Theoretische Grundlagen zu Kopulas

**Definition 3.2.1 (Kopula)** Eine  $d$ -dimensionale Kopula ist eine Verteilungsfunktion auf  $[0, 1]^d$  mit gleichverteilten Randverteilungen mit Trägern  $[0, 1]$ .

Eine Kopula-Funktion  $C(u_1, \dots, u_d)$  muss daher folgende Eigenschaften erfüllen (vgl. McNeil et al. 2005):

1.  $C(u_1, \dots, u_d)$  wächst monoton in jeder Koordinate,
2.  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$  und  $u_i \in [0, 1]$ ,
3. für alle  $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$  mit  $a_i \leq b_i$  gilt

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0,$$

wobei  $u_{j1} = a_j$  und  $u_{j2} = b_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, d\}$ .

Die erste Anforderung ist offensichtlich die multivariate Übertragung der Anforderung an jede Verteilungsfunktion des monotonen Wachstums. Die zweite Anforderung besagt, dass die Randverteilungen jeweils die Gleichverteilung auf  $[0, 1]$  sind. Die dritte Eigenschaft stellt sicher, dass die Summe, die als Wahrscheinlichkeit  $P(a_1 \leq U_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq U_d \leq b_d)$  für einen Zufallsvektor  $(U_1, \dots, U_d)^T$  interpretiert werden kann, nicht-negativ ist.

Der folgende Satz von Sklar zeigt die Wichtigkeit und Anwendungsmöglichkeiten von Kopulas: Jede multivariate Verteilung enthält eine Kopula, und eine multivariate Verteilung kann durch eine Kopula in Verbindung mit Randverteilungen konstruiert werden.

**Satz 3.2.2 (Sklar Theorem)** Sei  $F$  eine gemeinsame Verteilung mit den Grenzverteilungen  $F_1, \dots, F_d$ . Dann existiert eine Kopula  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ , so dass für alle  $(x_1, \dots, x_d) \in [-\infty, \infty]^d$

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

gilt.

Sind die Randverteilungen kontinuierlich, ist  $C$  eindeutig. Andernfalls ist  $C$  eindeutig auf  $F_1([-\infty, \infty]) \times \dots \times F_d([-\infty, \infty])$ .

Durch die Kombination von Randverteilungen und einer Kopula können multivariate Verteilung vollständig beschrieben werden und Zusammenhänge sind nicht auf lineare Korrelationen beschränkt. Dies ist dann von Bedeutung, wenn die Ränder nicht einer Normalverteilung folgen und insbesondere bei langsam abfallenden Flanken.

Für die praktische Anwendung von Vorteil ist die Möglichkeit, multivariate Modelle *bottom-up* aufzubauen. Korrelationen können nach Festlegung der Randverteilungen in dem Modell berücksichtigt werden. Vor allem dann, wenn ein multivariates Modell viele, z.T. sehr heterogene Risiken beinhaltet, oder wenn Randverteilungen starke Wölbungen aufweisen, gestaltet sich die Suche nach einer adäquaten parametrischen multivariaten Verteilung schwierig. Kopulas können hier einfacher und effektiver eingesetzt werden. Die Einflüsse verschiedener Abhängigkeiten können über unterschiedliche Kopulas untersucht werden. Zur Bestimmung der Gesamtschadenverteilung der Bank wird eine Kopula als plausibel angenommen und kalibriert. Im Anschluss kann die Gesamtschadenverteilung simuliert werden. Das Vorgehen wird in Abschnitt 3.2.6 dargestellt. Kopulas sind außerdem invariant unter streng monotonen Transformationen.

Um Eigenschaften von Kopulas zu beschreiben, wird in den nächsten Abschnitten zunächst auf mögliche Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen und die zugehörigen Maße eingegangen. Im Anschluss werden ausgewählte Kopulas mit ihren Eigenschaften dargestellt.

### 3.2.3 Rangkorrelationskoeffizienten

Zur Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen sind neben dem Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson, der den linearen Zusammenhang zweier metrischer Zufallsvariablen beschreibt, die Rangkorrelationskoeffizienten allgemein bekannt. Sie sind ein parameterfreies Maß für die Korrelation, d.h. sie geben Aufschluss darüber, wie gut eine (beliebige) monotone Funktion den Zusammenhang zweier mindestens ordinal skalierten Zufallsvariablen darstellen kann, ohne Annahmen über die Verteilungen zu treffen. Üblich sind Spearmans Rangkorrelationskoeffizient und Kendalls  $\tau$ , die im Folgenden definiert werden.

Die Rangkorrelation kann als Maß der Konkordanz angesehen werden. Zwei Punkte in  $\mathbb{R}^2$   $(x_1, x_2)$  und  $(y_1, y_2)$  heißen konkordant, wenn  $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) > 0$ . Sind zwei Zufallsvektoren  $(X_1, X_2)$  und  $(Y_1, Y_2)$  positiv korreliert, dann ist die Wahrscheinlichkeit für konkordante Punktepaare im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit für nicht konkordante Punktepaare hoch. Kendalls Tau betrachtet daher die Wahrscheinlichkeit für konkordante Punkte:

**Definition 3.2.3 (Kendalls  $\tau$ )** *Seien  $(X_1, X_2)$  und  $(Y_1, Y_2)$  Zufallsvektoren, die identisch verteilt und unabhängig sind. Dann heißt*

$$\begin{aligned}\tau(X_1, X_2) &= P((X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0) - P((X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0) \\ &= E(\text{sign}((X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2)))\end{aligned}$$

*Kendalls  $\tau$ .*

Empirisch wird Kendalls  $\tau$  für die Beobachtungspaare  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  durch

$$\tau = 1 - \frac{4 \sum_{i=1}^n [R(x_i) - R(y_i)]}{n(n-1)}$$

geschätzt.  $R(x_i)$  bzw.  $R(y_i)$  bezeichnet dabei den Rang der Beobachtungen. Die kleinste Beobachtung erhält den Rang 1, die größte den Rang  $n$ . Ein ähnliches Maß stellt der Spearmans Rangkorrelationskoeffizient dar:

**Definition 3.2.4 (Spearmans Rangkorrelationskoeffizient)** *Seien  $X$  und  $Y$  Zufallszahlen mit den Randverteilungen  $F$  und  $G$ . Dann heißt*

$$r_s(X, Y) = \text{corr}(F(X), G(Y))$$

*Spearmans Rangkorrelationskoeffizient.*

Spearmans Rangkorrelationskoeffizient misst also die lineare Korrelation der wahrscheinlichkeitstransformierten Zufallsvariablen. Empirisch wird Spearmans Rangkorrelationskoeffizient für die Beobachtungspaare  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  durch

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n [R(x_i) - R(y_i)]^2}{n(n^2 - 1)}$$

geschätzt.

Beide Rangkorrelationskoeffizienten sind auf dem Intervall  $[-1, 1]$  normiert, und ähnlich zum Korrelationskoeffizienten bedeutet ein Rangkorrelationskoeffizient von 1, dass die beiden Zufallsvariablen *komonoton* sind, d.h. sie bewegen sich gleichläufig. Im umgekehrten Fall eines Rangkorrelationskoeffizienten von  $-1$  spricht man von *kontermonotonen* Zufallsvariablen. Wie im Fall der Korrelation ergibt sich ein Rangkorrelationskoeffizient von 0, wenn die Zufallsvariablen unabhängig sind; der Umkehrschluss gilt jedoch nicht. Liegen kontinuierliche Randverteilungen vor, hängen beide Rangkorrelationskoeffizienten nur von der Kopula der Gesamtverteilung ab und können daher zur Kalibrierung einer angenommenen Kopula herangezogen werden. Da sie nur von der Kopula abhängen, überträgt sich die Invarianz unter streng monotonen Transformationen auf die Rangkorrelationskoeffizienten (vgl. McNeil et al. 2005).

### 3.2.4 Tail-Abhängigkeit

Ein weiteres Zusammenhangsmaß, die Tail-Abhängigkeit<sup>21</sup>, misst die Abhängigkeit im Flankenbereich der Verteilungen. Dabei ist zwischen unterem und oberem Flankenbereich zu unterscheiden. Wieder gibt es unterschiedlich definierte Maße für die Tail-Abhängigkeit. Die hier verwendete Darstellung

<sup>21</sup> Aus dem Englischen: *tail dependance*.

beruht auf McNeil et al. (2005). Es wird die bedingte Wahrscheinlichkeit betrachtet, dass ein Quantil von der einen Zufallsvariablen über- bzw. unterschritten wird, bedingt durch die Über- bzw. Unterschreitung des Quantils durch die andere Zufallsvariable. Formal ist die obere Tail-Abhängigkeit wie folgt definiert:

**Definition 3.2.5 (Obere Tail-Abhängigkeit)** *Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen  $F_1$  bzw.  $F_2$ . Die Existenz vorausgesetzt, ist der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit durch*

$$\lambda_u := \lambda_u(X, Y) = \lim_{q \rightarrow 1^-} P(Y > F_2^{-1}(q) | X > F_1^{-1}(q))$$

*gegeben. Für  $\lambda_u \in (0, 1]$  liegt im oberen Flankenbereich Tail-Abhängigkeit vor.  $\lambda_u = 0$  bedeutet die asymptotische Unabhängigkeit im Flankenbereich.*

Die Definition der unteren Tail-Abhängigkeit ist analog dazu wie folgt:

**Definition 3.2.6 (Obere Tail-Abhängigkeit)** *Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen  $F_1$  bzw.  $F_2$ . Die Existenz vorausgesetzt, ist der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit durch*

$$\lambda_l := \lambda_l(X, Y) = \lim_{q \rightarrow 0^+} P(Y \leq F_2^{-1}(q) | X \leq F_1^{-1}(q))$$

*gegeben. Für  $\lambda_l \in (0, 1]$  liegt Tail-Abhängigkeit im unteren Flankenbereich vor.  $\lambda_l = 0$  bedeutet die asymptotische Unabhängigkeit im Flankenbereich.*

Tail-Abhängigkeiten sind gerade bei der Risikoschätzung von Interesse, da sie das gemeinsame Auftreten extremer Ereignisse beschreiben. Die Koeffizienten hängen, wie die Rangkorrelationskoeffizienten, nur von der Kopula der gemeinsamen Verteilung ab.

Im folgenden Abschnitt werden einige ausgewählte Kopulas und ihre Eigenschaften dargestellt. Im Anschluss daran wird die praktische Anwendung und Kalibrierung erläutert.

### 3.2.5 Ausgewählte Kopulas

Es wird zwischen fundamentalen, impliziten und expliziten Kopulas unterschieden. Zu den fundamentalen Kopulas gehört zum Beispiel die Kopula für unabhängige Zufallsvariablen

$$C^{ind}(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i.$$

Implizite Kopulas sind aus bekannten, multivariaten Verteilungen extrahiert und können nicht immer explizit dargestellt werden. Zu den impliziten Kopulas gehört die Gauss-Kopula,

$$C_P^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_P(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)),$$

wobei  $\Phi_P$  die multivariate Normalverteilung und  $F_1, \dots, F_d$  die Randverteilungen bezeichnen. Sie ist aus der multivariaten Normalverteilung extrahiert, woher ihr Name rührt. Daher ist sie durch die Korrelationsmatrix ausreichend parametrisiert. Die Gauss-Kopula besitzt keine explizite Darstellung. Als Spezialfälle beinhaltet die Gauss-Kopula die Unabhängigkeit mit  $P = I_d$  und die Komonotonie der Zufallsvariablen, wenn  $P = J_d$ .  $I_d$  bezeichnet die  $d$ -dimensionale Einheitsmatrix,  $J_d$  die  $d$ -dimensionale Matrix, in der alle Elemente 1 sind. Im bivariaten Falle  $d = 2$  ist auch der Fall der Kontermonotonie mit dem Korrelationskoeffizienten  $\rho = -1$  ein Spezialfall der Gauss-Kopula.<sup>22</sup> Die Gauss-Kopula interpoliert also im bivariaten Fall zwischen perfekter positiver Abhängigkeit, Unabhängigkeit und perfekter negativer Abhängigkeit der Zufallsvariablen. Der Parameter  $\rho$  drückt die Stärke der Abhängigkeit aus.

Die Gauss-Kopula weist keine Tail-Abhängigkeiten auf.

Explizite Kopulas besitzen im Gegensatz zu impliziten Kopulas immer eine explizite Darstellung. Die im Folgenden dargestellten Kopulas gehören zu der Familie der archimedischen Kopulas.<sup>23</sup> Alle Kopulas dieser Familie sind darstellbar durch

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)).$$

Dabei bezeichnet  $\phi$  eine kontinuierliche, streng monoton fallende und konvexe Funktion  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\phi(1) = 0$ , die als Generator bezeichnet wird.<sup>24</sup>

Die Gumbel-Kopula  $C_\theta^{Gu}$  mit Generator

$$\phi(t) = (-\ln(t))^\theta \text{ mit } \theta \geq 1$$

interpoliert zwischen Unabhängigkeit für  $\theta = 1$  und perfekter positiver Abhängigkeit für  $\theta \rightarrow \infty$ .  $\theta$  drückt dabei die Stärke der Abhängigkeit aus. Die

<sup>22</sup>Kontermonotonie ist nur im bivariaten Falle möglich. Dies ist an einem dreidimensionalen Beispiel schnell ersichtlich: Sei  $X_1$  eine Zufallsvariable, die nur positive Werte annehmen kann. Seien weiter  $X_2 = 1/X_1$  und  $X_3 = e^{-X_1}$ . Offensichtlich sind  $(X_1, X_2)$  und  $(X_1, X_3)$  kontermonoton.  $(X_2, X_3)$  ist aber ein komotoner Zufallsvektor. Der Vektor  $(X_1, X_2, X_3)$  kann daher nicht kontermonoton sein. Für weitere Details und den Beweis wird auf McNeil et al. (2005) verwiesen.

<sup>23</sup>Die bereits dargestellte Kopula für unabhängige Zufallsvariablen gehört ebenfalls der archimedischen Familie an.

<sup>24</sup>Genaugenommen handelt es sich hier um einen *strikten* Generator und die archimedische Familie beinhaltet auch Kopulas mit nicht strikten Generatoren. Die hier dargestellten Kopulas haben einen strikten Generator im angegebenen Parameterbereich. Für Einzelheiten wird auf McNeil et al. (2005) verwiesen.

Gumbel-Kopula weist obere Tail-Abhängigkeiten mit  $\lambda_u = 2 - 2^{1/\theta}$ , aber keine untere Tail-Abhängigkeiten auf ( $\lambda_l = 0$ ). Sie eignet sich damit für die Modellierung asymmetrischer asymptotischer Abhängigkeitsstrukturen.

Der Generator

$$\phi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1) \text{ mit } \theta \geq 0$$

erzeugt die Clayton-Kopula  $C_\theta^{Cl}$ . Auch sie interpoliert zwischen Unabhängigkeit für  $\theta \rightarrow 0$  und perfekter positiver Abhängigkeit mit  $\theta \rightarrow \infty$ . Wieder drückt  $\theta$  die Stärke der Abhängigkeit aus. Im Gegensatz zur Gumbel-Kopula weist sie untere Tail-Abhängigkeit mit  $\lambda_l = 2^{-1/\theta}$ , aber keine obere Tail-Abhängigkeit auf.

Die Frank-Kopula  $C_\theta^{Fr}$  hat den Generator

$$\phi(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right) \text{ mit } \theta \in \mathbb{R} .$$

Durch sie kann eine symmetrische Abhängigkeitsstruktur ohne Tail-Abhängigkeiten modelliert werden. Sie interpoliert ebenfalls abhängig von  $\theta$  zwischen Unabhängigkeit und perfekter positiver Abhängigkeit.

Zur Modellierung einer Abhängigkeitsstruktur mit Abhängigkeiten im unteren und oberen Flankenbereich eignet sich die Verallgemeinerte-Clayton-Kopula  $C_{\theta,\delta}^{GC}$  mit Generatorfunktion

$$\phi(t) = \theta^{-\delta}(t^{-\theta} - 1)^\delta \text{ mit } \theta \geq 0, \delta \geq 1 .$$

Die Tail-Abhängigkeiten sind  $\lambda_u = 2 - 2^{1/\delta}$  und  $\lambda_l = 2^{-1/(\delta\theta)}$ . Es können sowohl symmetrische als auch asymmetrische Tail-Abhängigkeiten modelliert werden.

### 3.2.6 Praktische Anwendung und Kalibrierung

Nach Satz 3.2.2 ist eine multivariate Verteilung mit kontinuierlichen Rändern durch ihre Kopula und ihre Randverteilungen eindeutig bestimmt. Der Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson hängt von den Randverteilungen und der Kopula ab, während die Rangkorrelationskoeffizienten und die Koeffizienten der Tail-Abhängigkeit nur von der Kopula der multivariaten Verteilung abhängen. Anzumerken ist, dass keiner der Koeffizienten allein ausreicht, um eine multivariate Verteilung gemeinsam mit den Randverteilungen zu beschreiben.

Während sich die Randverteilungen der einzelnen Risikoklassen im praktischen Fall noch relativ einfach schätzen lassen, liegen fast keine Informationen über die gemeinsame Verteilung vor. Aufgrund dieser Problematik wird meist *a priori* eine Kopula nach plausiblen Annahmen festgelegt, die im Anschluss mit den vorliegenden Daten kalibriert wird. Üblicherweise greift man auf die expliziten archimedischen Kopulas zurück. Tabelle 3.1 fasst die im

Tabelle 3.1: Eigenschaften ausgewählter Kopulas

Kopula	Untere Tail-Abhängigkeit	Obere Tail-Abhängigkeit	Symmetrisch
Gumbel	Nein	Ja	Nein
Clayton	Ja	Nein	Nein
Frank	Nein	Nein	Ja
Ver. Clayton	Ja	Ja	Beliebig

letzten Abschnitt vorgestellten archimedischen Kopulas und die für die Wahl relevanten Eigenschaften zusammen.

Hinweise, ob Tail-Abhängigkeiten vorliegen und ob diese symmetrischer oder asymmetrischer Natur sind, kann der sogenannte  $\chi$ -Plot nach Fischer und Switzer (2001) geben. Die Beobachtungen  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  werden als Stichprobe der gemeinsamen Verteilung  $H$  zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  angesehen. Für jede Beobachtung  $(x_i, y_i)$  werden

$$H_i = \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} 1_{\{x_j \leq x_i, y_j \leq y_i\}}$$

$$F_i = \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} 1_{\{x_j \leq x_i\}}$$

$$G_i = \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} 1_{\{y_j \leq y_i\}}$$

und

$$S_i = \text{sign}\{(F_i - 1/2)(G_i - 1/2)\}$$

bestimmt. Der  $\chi$ -Plot  $(\lambda_i, \chi_i)$  ergibt sich aus

$$\lambda_i = 4S_i \max\{(F_i - 1/2)^2, (G_i - 1/2)^2\}$$

und

$$\chi_i = \frac{H_i - F_i G_i}{\sqrt{F_i(1-F_i)G_i(1-G_i)}}.$$

$\lambda_i$  kann als Abstand der Beobachtung  $i$  zum Median der Verteilung  $H$  interpretiert werden. Die  $\lambda$ -Werte sind auf dem Intervall  $[-1, 1]$  normiert. Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig, so sind die durch  $\lambda_i$  ausgedrückten Abstände eine Stichprobe einer auf  $[-1, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariable. Bei positiver Korrelation der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  konzentrieren sich die  $\lambda$ -Werte im positiven Bereich; für negativ korrelierte Zufallsvariablen ergibt sich eine Konzentration im negativen Bereich.

Für ein festes  $i$  misst  $\chi_i$  die Korrelation der binären Variablen

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } X_j \leq X_i, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$Y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } Y_j \leq Y_i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sind die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  unabhängig, so haben die zu  $\chi_i$  gehörigen Zufallsvariablen den Erwartungswert 0. Entsprechend spricht für die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen, wenn ein großer Teil, z.B. 95%, der Punkte des  $\chi$ -Plot im Bereich nahe der horizontalen Achse liegen. Während starke Abweichungen in den positiven Bereich für positive Abhängigkeit zwischen  $X$  und  $Y$  spricht, deuten Abweichungen in den negativen Bereich auf negative Abhängigkeiten hin.

In Abwesenheit von Tail-Abhängigkeiten, ist  $\chi \rightarrow 0$  für  $\lambda \rightarrow -1$  und  $\lambda \rightarrow 1$  zu erwarten. Weisen die empirischen  $\chi_i$  dieses Verhalten nicht auf, deutet dies auf das Vorliegen von Tail-Abhängigkeiten hin (vgl. Abberger 2005).

Um auf die Symmetrie der Tail-Abhängigkeit zu schließen, werden zwei weitere  $\chi$ -Plots erstellt, die nur Beobachtungen enthalten, die im unteren bzw. oberen Ende der Verteilung liegen. Im Falle komotoner Zufallsvariablen werden jeweils nur die Beobachtungen betrachtet, für die beide Zufallsvariablen unter- bzw. oberhalb des Medians liegen. Für kontermonotone Zufallsvariablen erstellt man  $\chi$ -Plots separat mit Beobachtungen, für die die eine Zufallsvariable unter- und die andere oberhalb des Medians liegen und umgekehrt.

Im Anschluss an die Wahl der Kopula werden die Parameter der Kopula über die empirischen Daten geschätzt. Die Parameter können über die Momentenmethode, die ML-Methode oder die IFM-Methode geschätzt werden.

In der Momentenmethode werden die empirischen Schätzwerte der Rangkorrelationskoeffizienten in die Formel zur Bestimmung der theoretischen Koeffizienten der Kopula eingesetzt und diese nach den Parametern aufgelöst. Dies hat den Vorteil, dass die Schätzung ohne Berücksichtigung der Randverteilungen erfolgt und die Dichte der Kopula nicht benötigt wird. Beide Rangkorrelationskoeffizienten können dabei verwendet werden. Die Wahl hängt davon ab, welche Kopula verwendet wird und wie leicht die Koeffizienten bestimmt werden können. Für archimedische Kopulas bietet sich Kendalls  $\tau$  an, da es direkt aus der Generatorfunktion bestimmt werden kann.

Sind  $X_1$  und  $X_2$  kontinuierliche Zufallsvariablen mit einer eindeutigen archimedischen Kopula mit Generator  $\phi$ , dann bestimmt sich Kendalls  $\tau$  zu

$$\tau(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt.^{25}$$

---

<sup>25</sup>Vgl. Cherubini et al. (2005).

Tabelle 3.2 sind die Werte für die dargestellten archimedischen Kopula zu entnehmen.

Tabelle 3.2: Kendalls  $\tau$  archimedischer Kopulas

Kopula	Kendalls Tau $\tau$
Gumbel $C_{\theta}^{Gu}$	$1 - 1/\theta$
Clayton $C_{\theta}^{Cl}$	$\theta/(\theta + 2)$
Frank $C_{\theta}^{Fr}$	$1 - 4\theta^{-1} \left( 1 - \theta^{-1} \int_0^{\theta} \frac{t}{e^t - 1} dt \right)$
Verallgemeinerte Clayton $C_{\theta, \delta}^{GC}$	$\frac{(2+\theta)\delta-2}{(2+\theta)\delta}$

Quelle: McNeil et al. (2005)

Um für die ML-Methode die Likelihood-Funktion aufzustellen, wird die Dichte der angenommenen Kopula benötigt. Während nicht für jede Kopula eine Dichte existiert, besitzen die dargestellten Kopulas Dichtefunktionen. Für die beschriebenen expliziten Kopulas lässt sich die Dichte nach

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \cdots \partial u_d}$$

bestimmen. Für implizite Kopulas einer kontinuierlichen gemeinsamen Verteilung mit Dichte  $f$  und streng monoton wachsenden, kontinuierlichen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$  mit den Dichten  $f_1, \dots, f_d$  ergibt sich die Dichte der Kopula zu

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \cdots f_d(F_d^{-1}(u_d))}.$$

Die ML-Methode bestimmt die Parameter der Randverteilungen gleichzeitig mit den Parametern der Kopula. Sie sind im Parametervektor  $\theta$  zusammengefasst. Aus der Dichte der Kopula  $c$ , den Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$  und den zugehörigen Dichten  $f_1, \dots, f_d$  wird die log-Likelihood-Funktion für die Beobachtungen  $(x_{11}, \dots, x_{1d}), \dots, (x_{n1}, \dots, x_{nd})$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln[c(F_1(x_{i1}), \dots, F_d(x_{id}))] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \ln[f_j(x_{ij})]$$

gebildet und über  $\theta$  maximiert.

Da die gleichzeitige Bestimmung der Parameter der Randverteilungen und der Kopula sehr rechenaufwändig ist, wird die Schätzung meist in zwei Schritte unterteilt. Im ersten Schritt werden die Parameter der Randverteilungen bestimmt und erst im zweiten Schritt die Parameter der Kopula. Diese Methode heißt *inference for the margins*, kurz IFM-Methode.

Aus den empirischen Daten und den geschätzten Randverteilungen wird eine Pseudo-Stichprobe gebildet, über die die Parameter der Kopula bestimmt werden. Bezeichnen  $\widehat{F}_1, \dots, \widehat{F}_d$  die geschätzten Randverteilung und

$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{id})'$  mit  $i = 1, \dots, n$  die empirischen Beobachtungen, so erhält man die Pseudo-Stichprobe durch

$$u_i = (u_{i1}, \dots, u_{id})' = (\widehat{F}_1(x_{i1}), \dots, \widehat{F}_d(x_{id}))' .$$

Der Parameterschätzer  $\widehat{\theta}_c$  der Kopula bestimmt sich über die Maximierung der log-Likelihood-Funktion

$$l(\theta_c) = \sum_{i=1}^n \ln(c_{\theta_c}(u_i)) .$$

Von Vorteil der ML- und der IFM-Methode ist, dass die Modellgüte verschiedener Kopulas über einen ML-Verhältnistest bzw. über den Vergleich der sich ergebenden Likelihood-Werte bewertet werden kann.

Für bivariate archimedische Kopulas kann die Güte des Modells alternativ über die unbeobachtete Zufallsvariable  $Z = F(X_1, X_2)$  bewertet werden. Nach Genest und Rivest (1993) ergibt sich die Verteilung  $K$  eindeutig mit der Generatorfunktion  $\phi$  aus

$$K(z) = z - \frac{\phi(z)}{\phi'(z)} .$$

Für die Beobachtungspaare  $(x_{11}, x_{12}), \dots, (x_{n1}, x_{n2})$  kann die Verteilung über

$$\widehat{K}(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\vartheta_i \leq z\}}$$

mit

$$\vartheta_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n 1_{\{x_{j1} < x_{i1}, x_{j2} < x_{i2}\}}$$

geschätzt werden.

Verschiedene Kopulas können nun über die Distanz zwischen der nicht-parametrischen Schätzung und der parametrisch aus der (angepassten) Kopula bestimmten Verteilung verglichen werden. Frees und Valdez (1998) schlagen dazu vor, die Verteilungen in QQ-Plots gegenüberzustellen und diese für verschiedene Kopulas zu vergleichen.

Sind die Kopula und ihre Parameter geschätzt, kann im Anschluss über Simulationsverfahren die Verteilung der Schäden mehrerer Risiken bestimmt werden. Über den im Folgenden dargestellten Algorithmus wird eine Realisation der Kopula simuliert und im Anschluss über die Quantilsfunktionen der Randverteilungen in eine Realisation der multivariaten Verteilung überführt. Der folgende Algorithmus simuliert eine  $d$ -dimensionale Kopula  $C$ :

1. Definiere  $C_k(u_1, \dots, u_k) = C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1)$ ,
2. generiere  $p_1, \dots, p_d$  unabhängige auf  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallszahlen,

3. setze  $u_1 = p_1$ ,
4. für  $k = 2, \dots, d$ , bestimme  $u_k$  aus

$$\begin{aligned}
 p_k = C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) &= P(U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}) \\
 &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} / \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}}.
 \end{aligned}$$

Der dargestellte Algorithmus ist sehr rechenaufwändig. Für einzelne Kopulas existieren effizientere Algorithmen, auf die nach Festlegung der Kopula zurückgegriffen werden kann. Beispiele finden sich in McNeil et al. (2005) oder Frees und Valdez (1998).

Aus der Realisation  $u_1, \dots, u_d$  der Kopula wird die Realisation  $F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)$  der gemeinsamen Verteilung bestimmt. Nach vielfacher Wiederholung kann aus den Simulationsergebnissen die gemeinsame Verteilung der Verluste über die empirische Verteilung approximiert werden. Soll die Gesamtschadenverteilung der Risiken geschätzt werden, wird aus jeder Realisation eines Simulationslaufes der aggregierte Schaden  $s = F_1^{-1}(u_1) + \dots + F_d^{-1}(u_d)$  bestimmt. Über die empirische Verteilung der aggregierten Schäden kann dann die Gesamtschadenverteilung geschätzt werden. Das Vorgehen entspricht dabei den in Abschnitt 3.1.3 dargestellten Verfahren.

In der Praxis müssen viele Risikoklassen mit unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen zu einer Gesamtschadenverteilung der Bank aggregiert werden. Alexander (2003b) schlägt dazu die paarweise Zusammenführung der Risiken über jeweils geeignete Kopulas vor. Für je zwei Risiken mit den Verlusten  $X$  und  $Y$  wird eine geeignete Kopula  $C$  mit Dichte  $c$  kalibriert und die Dichte  $k$  der Summe der Verluste  $Z = X + Y$  bestimmt. Dies kann entweder über das zuvor dargestellte Simulationsverfahren oder über das Faltungsin-tegral

$$k(z) = \int_x h(x, z - x) dx = \int_y h(z - y, y) dy$$

erfolgen. Die multivariate Dichte  $h$  ergibt sich aus der kanonischen Darstellung

$$h(x, y) = c(F_x(x), F_y(y)) f_x(x) f_y(y).^{26}$$

Dabei bezeichnen  $F_x$  und  $F_y$  die Randverteilungen und  $f_x$  und  $f_y$  die zugehörigen Dichten.

Im nächsten Schritt wird ein weiteres Risiko mit Verlust  $J$  hinzugefügt. Dazu wird eine Kopula für die Zufallsvariablen  $Z = X + Y$  und  $J$  über die vorliegenden empirischen Daten kalibriert und wieder die gemeinsame Dichte bestimmt. Iterativ wird so die gemeinsame Dichte aller Risiken bestimmt, über die die Gesamtschadenverteilung der Bank bestimmt werden kann. Aus

---

<sup>26</sup>Vgl. Cherubini et al. (2005)

dieser kann dann der VaR oder ein anderes Risikomaß auf Ebene aller Bereiche und Risiken der Bank bestimmt werden.

Ein Beispiel aus der Praxis, in dem Kopulas zur Bestimmung der Kapitalanforderung für operationelle Risiken eingesetzt werden, findet sich in Chapelle et al. (2005).

### 3.3 Kausalmodelle

Verlustverteilungsansätze quantifizieren Risiken vor allem auf Basis historischer Daten, und es wird versucht, zukunftsgerichtete Elemente wie Faktoren des Risiko- und Kontrollumfelds einzubinden. Der Fokus von Kausalmodellen liegt in den Ursachen von Verlusten, den Risikotreibern. Die Treiber werden über einen oder mehrere messbare Risikoindikatoren beschrieben, um sie in den Modellen handhaben zu können. Risikotreiber können z.B. die Anzahl und Erfahrung der Mitarbeiter, Transaktionsvolumina oder die Qualität von Prozessabläufen sein. Einzelne Treiber wie die Mitarbeiterzahl besitzen direkte Indikatoren, während andere wie die Erfahrung über abgeleitete Indikatoren, etwa die durchschnittliche Berufserfahrung, beschrieben werden müssen. Zu beachten ist, dass ein Indikator für verschiedene Risikotreiber und ein Risikotreiber für verschiedene Risiken unterschiedliche Interpretationen besitzen können.

Ziel der Kausalmodelle ist es, den Zusammenhang zwischen entstandenen operationellen Verlusten und den Risikotreibern herzustellen. Gelingt dies, ist eine zukunftsgerichtete Quantifizierung der Risiken möglich. Von größerer Bedeutung sind Kausalmodelle allerdings im Risikomanagement, da dort ein genaues Verständnis der Verlustursachen von entscheidender Bedeutung ist. Ziel der Modelle ist daher oft nicht eine Quantifizierung des Risikos, sondern ein Verständnis der Ursachen, um Managemententscheidungen zu unterstützen.

Kritisch ist neben der erforderlichen Identifizierung potentieller Risikotreiber die Kalibrierung der Modelle, d.h. die Quantifizierung des Zusammenhangs zwischen Treibern und Verlusten. Mit den kurzen Datenhistorien von operationellen Verlusten, die zur Zeit vorliegen, ist eine verlässliche Kalibrierung nahezu unmöglich. Daher sollten Ergebnisse der Kausalmodelle mit großer Vorsicht interpretiert werden.

Hartung (2003) weist darauf hin, dass zur Ableitung einer Ursache-Wirkungsbeziehung mindestens ein Verlustereignis in der Vergangenheit aufgetreten sein muss. Die Problematik, dass neuartige Risiken nahezu unmöglich in die Modellierung einbezogen werden können, bleibt also bestehen.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst die lineare Regression erläutert, bevor auf neuronale Netze und Bayes-Netzwerke näher eingegangen wird.

### 3.3.1 Lineare Regressionsmodelle

Die multiple lineare Regression ist ein Modell, in dem eine beobachtete Variable  $Y_t$  durch mehrere ebenfalls beobachtete erklärende Variablen, die Regressoren  $X_{t,1}, \dots, X_{t,k}$ , über den Zusammenhang

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t,1} + \dots + \alpha_k X_{t,k} + \epsilon_t$$

erklärt wird. Die Residuen  $\epsilon_t$  stellen die nicht erklärten Anteile dar und werden zur Bestimmung der Parameter  $\alpha_0, \dots, \alpha_k$  minimiert. Dazu können verschiedene Verfahren verwendet werden. Das gängigste ist die Methode kleinster Quadrate (OLS). Für  $n$  Beobachtungen ergeben sich die Parameter aus

$$\min_{\alpha_0, \dots, \alpha_k} \sum_{t=1}^n \left( Y_t - \sum_{i=0}^k \alpha_i X_{t,i} \right)^2 .$$

Es wird die Annahme getroffen, die Residuen seien iid normalverteilt und hingen nicht systematisch voneinander ab. Eine solche Abhängigkeit, die Autokorrelation, liegt dann vor, wenn die Residuen fester Zeitabstände miteinander korrelieren. Die OLS-Schätzer sind in diesem Fall erwartungstreu, aber nicht effizient, da der Standardfehler unterschätzt wird. Eine Überprüfung auf Autokorrelation kann über den *Durbin-Watson*-Test erfolgen. Allerdings ist er nicht geeignet, wenn die erklärte Variable einer Vorperiode als Regressor einer späteren Periode modelliert wird. In diesem Fall sollte stattdessen der *h-Test* von Durbin Verwendung finden (vgl. Albers und Skiera 1998). Das Modell kann über die *Cochrane-Orcutt*-Methode an Autokorrelationen angepasst werden (vgl. Cruz 2002). Alternativ kann versucht werden, durch Hinzunahme zusätzlicher Regressoren die Autokorrelation zu beheben.

Ist die Varianz der Residuen nicht konstant, liegt Heteroskedastizität vor. Auch hier ist die OLS-Schätzung nicht effizient, wenn auch unverzerrt. Durch Hinzunahme zusätzlicher Regressoren oder Transformation der Variablen kann versucht werden, die Heteroskedastizität zu beheben. Da bei Verwendung der OLS-Methode implizit Perioden mit höherer Varianz der Residuen stärker gewichtet werden, kann in diesem Fall die Methode gewichteter kleinster Quadrate (WLS) Abhilfe schaffen. Die Testverfahren von *Breusch-Pagan* und *White* können Aufschluss über das Vorliegen von Heteroskedastizität geben (vgl. Albers und Skiera 1998).

Die Annahme der Normalverteilung der Residuen ist für die Signifikanzprüfung des Modells von Bedeutung. Zur Überprüfung wird die Hypothese getestet, dass die Regressionskoeffizienten gleich 0 sind. Die Teststatistik ist die sogenannte *F*-Statistik

$$F = \frac{n - k - 1}{k} \left( \frac{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}{\sum_{t=1}^n \epsilon_t^2} - 1 \right) .$$

$n$  bezeichnet dabei den Stichprobenumfang und  $k$  die Anzahl der erklärenden Variablen.  $\bar{Y}$  bezeichnet den Mittelwert der zu erklärenden Variablen.

Die  $F$ -Statistik folgt der  $F$ -Verteilung mit  $k$  und  $n - k - 1$  Freiheitsgraden, über die die Signifikanzprüfung erfolgt. Zusätzlich sollte die Signifikanz jedes Koeffizienten über die  $t$ -Statistik

$$t_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{t=1}^n \epsilon_t / (n - 2)}} ,$$

die der  $t$ -Verteilung mit  $n - k - 1$  Freiheitsgraden folgt, überprüft werden. Die Güte eines einfachen linearen Regressionsmodells kann über das Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n \epsilon_t}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}$$

bewertet werden. Es ist auf  $[0, 1]$  normiert und kann als der Anteil der Varianz der erklärten Variable interpretiert werden, der durch das Modell erklärt wird. Je größer  $R^2$ , desto höher ist die Modellgüte.

In multiplen Regressionsmodellen muss das Bestimmtheitsmaß angepasst werden, da es mit der Einbindung jeglicher zusätzlicher Regressoren steigt. Das angepasste Bestimmtheitsmaß  $\bar{R}^2$  ist für  $k$  Regressoren und  $n$  Datenpunkte durch

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n - 1}{n - k} (1 - R^2)$$

gegeben. Zu bemerken ist, dass  $\bar{R}^2$  im Gegensatz zum gewöhnlichen Bestimmtheitsmaß nicht auf  $[0, 1]$  normiert ist und auch negative Werte annehmen kann. Die natürliche Interpretation des einfachen Bestimmtheitsmaßes ist nicht mehr gegeben.

Wird das angepasste Bestimmtheitsmaß zum Vergleich der Güte mehrerer Modelle verwendet, werden Modelle mit einer höheren Anzahl an Regressoren bevorzugt. Daher finden andere Kriterien zur Beurteilung der Güte Anwendung. Ein bekanntes Maß, das eine Erhöhung der Regressorenzahl stärker bestraft, ist das *Akaike Informationskriterium AIC*. Das *AIC* ergibt sich aus

$$AIC = \frac{\sum_{t=1}^n \epsilon_t^2}{n} e^{2k/n} .$$

Bei sehr großen Stichproben werden unter Verwendung des *AIC* ebenfalls Modelle mit vielen erklärenden Variablen bevorzugt. In diesem Fall empfiehlt sich daher das *Bayes'sche Informationskriterium* von Schwarz *SBC*:

$$SBC = \frac{\sum_{t=1}^n \epsilon_t^2}{n} n^{k/n} .$$

Im Bezug auf operationelle Risiken stellt die zu erklärende Variable  $Y_t$  operationelle Verluste und die Regressoren  $X_{t,1}, \dots, X_{t,k}$  Faktoren der Geschäfts- und Kontrollumgebung einer Periode dar. Wichtig dazu ist die Erhebung der Verluste mit den erklärenden Faktoren zum Zeitpunkt der Entstehung.

Problematisch ist die Erfassung aller relevanten Regressoren. Hierbei können zwei Ansätze verfolgt werden: Bei der vorwärts gerichteten Regression wird zunächst der Regressor in das Modell aufgenommen, der den höchsten Erklärungsbetrag liefert. Danach wird der Regressor in das Modell aufgenommen, der unter den verbliebenen potentiellen Regressoren den maximalen Erklärungsbeitrag liefert. Sukzessiv werden auf diese Weise Regressoren hinzugefügt, bis der maximale Beitrag der verbliebenen Regressoren insignifikant wird.

In der rückwärts gerichteten Regression werden zunächst alle möglichen Regressoren in das Modell aufgenommen. Danach werden die insignifikanten Regressoren mit den kleinsten Erklärungsbeiträgen sukzessiv aus dem Modell entfernt. Das Verfahren bricht ab, wenn der minimale Erklärungsbeitrag der Regressoren signifikant wird.

Bei der Auswahl der Regressoren ist auf Multikollinearität zu achten. Multikollinearität liegt vor, wenn die Regressoren untereinander linear abhängig sind. Schwache Multikollinearität tritt in den meisten Regressionsanalysen auf und ist unproblematisch. Die OLS-Schätzwerte sind nach wie vor unverzerrt und effizient. Bei starken Abhängigkeiten unter den Regressoren kann die Varianz der Schätzer aber sehr groß werden, so dass geringe Änderungen der Daten starke Änderungen der Schätzwerte hervorrufen.

Im Falle von Multikollinearität können Regressoren mit niedrigen Signifikanzniveaus fälschlicherweise als insignifikant angenommen werden. Daher kann ein hohes Bestimmtheitsmaß  $R^2$  in Verbindung mit niedrigen Signifikanzniveaus einzelner Regressoren auf Multikollinearität hindeuten. Abhängigkeiten zwischen zwei erklärenden Variablen drücken sich in hohen Korrelationen aus und können über die Korrelationsmatrix erkannt werden. Andere Abhängigkeiten werden durch Regressionen sichtbar, in denen je eine erklärende Variable durch die übrigen Regressoren erklärt wird. Hohe Bestimmtheitsmaße dieser Regressionen lassen auf Kollinearitäten der Regressoren schließen.<sup>27</sup>

Multikollinearität kann durch Auslassen einer oder mehrerer abhängiger Regressoren begegnet werden. Alternativ können durch eine Faktorenanalyse abhängige Regressoren zu einer Variablen zusammengefasst werden (vgl. Cruz 2002). Die Analyse der Abhängigkeiten potentieller Regressoren spielt bei der Modellierung eine entscheidende Rolle. So kann eine Vielzahl von erklärenden Faktoren des Geschäfts- und Kontrollumfeldes auf eine handhabbare Menge reduziert werden. Eine weitere Alternative, vorliegender Multikollinearität zu begegnen, kann die *Ridge-Regression* bieten. Dabei ist fallweise zu überprüfen, ob das Verfahren sinnvolle Ergebnisse liefert.

Vor der Regression sollte die Datengrundlage auf Ausreißer hin untersucht

---

<sup>27</sup> Oft werden alternative Maße für Multikollinearität verwendet. Ein hohes Bestimmtheitsmaß führt zu einer niedrigen *Toleranz*  $T = 1 - R^2$  der Variablen und einem hohen *Varianzinflationsfaktor*  $VIF = 1/T$ .

werden, die weit von den sonstigen Datenpunkten entfernt liegen. Solche Punkte können das Ergebnis verfälschen und sollten daher vor der Regression gestrichen werden. Ausreißer können graphisch oder durch statistische Verfahren wie der Distanz von Cook oder Mahalanobis erkannt werden. Nach der Regressionsanalyse geben die Koeffizienten Aufschluss über den Einfluss der Regressoren auf die erklärte Variable. Im Falle operationeller Verluste können die Koeffizienten monetär bewertet werden. Zum Vergleich des Einflusses verschiedener Regressoren sollten die Koeffizienten standardisiert oder Elastizitäten betrachtet werden, da die erklärenden Variablen sich oft nicht direkt vergleichen lassen (vgl. Albers und Skiera 1998). Die standardisierten Koeffizienten sind durch

$$a_i = \alpha_i \frac{\hat{\sigma}_{X_k}}{\hat{\sigma}_Y}$$

gegeben. Die Elastizität ist definiert als

$$\eta_{X_i, Y} = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{Y}.$$

Die Schätzwerte der Korrelationskoeffizienten sind normalverteilt. Da ihre Varianz geschätzt werden muss, können über die  $t$ -Verteilung Konfidenzintervalle gebildet werden.

Eine Prognose zukünftiger Verluste ist durch die Prognose der Regressoren und Anwendung der Regressionsgleichung möglich. Der Prognosewert ist ebenfalls normalverteilt. Da auch hier die Varianz geschätzt werden muss, können Konfidenzintervalle über die  $t$ -Verteilung ermittelt werden.

Abschließend sei erwähnt, dass nicht-lineare, multiplikative Zusammenhänge durch Logarithmieren in ein lineares, additives Modell überführt und wie dargestellt behandelt werden können.

### 3.3.2 Neuronale Netzwerke

Neuronale Netzwerke sind der Struktur des Gehirns nachempfunden. Neuronen sind im Gehirn in dichten Netzwerken miteinander verbunden. Sie empfangen Informationen von der Umwelt oder anderen Neuronen und geben sie wiederum an andere Neuronen oder die Umwelt ab. In künstlichen neuronalen Netzwerken stellen die Knoten die Neuronen dar. Sie werden auch als Einheiten oder Units bezeichnet.

Es werden drei Arten von Neuronen unterschieden: Input-Knoten, die Signale der Umwelt empfangen, Output-Knoten, die Informationen an die Umwelt abgeben, und Hidden-Knoten, die sich zwischen Input- und Output-Knoten befinden.

Verbindungen zwischen den Neuronen werden durch gerichtete Kanten dargestellt. Der Einfluss eines Neurons auf einen Nachfolger wird über ein Gewicht modelliert, das die Stärke der Verbindung ausdrückt.

Der Eingangsvektor  $x = (x_1, \dots, x_n)$  stellt die Signale dar, die ein Neuron von seinen Vorgängern erhält. Diese werden mit den Gewichten  $w = (w_1, \dots, w_n)$  multipliziert und zur Eingabe der Zelle summiert. Die Eingabe wird über eine Aktivierungsfunktion in ein Signal, die Netzeingabe des Neurons, überführt, das an nachfolgende Neuronen bzw. die Umwelt weitergeleitet wird. Als Aktivierungsfunktion kommen verschiedenste monoton steigende Funktionen in Frage. Häufige Aktivierungsfunktionen sind *Schwellenwertfunktionen*, die bei Überschreitung eines Schwellenwertes den Wert der Netzeingabe und ansonsten den Wert 0 annehmen, stückweise lineare Funktionen, die unterhalb und oberhalb eines Intervalls je einen festen Wert annehmen, oder *sigmoide* Funktionen, die eine S-förmige Gestalt aufweisen. Sie nähern sich asymptotisch den Intervallgrenzen des Zielbereichs an. Vor allem sind sigmoide Funktionen differenzierbar und erfüllen damit die Anforderung des später erläuterten *Backpropagation*-Verfahrens. Zwei Beispiele sollen die Thematik erläutern. Die Aktivierungsfunktionen der Input-Knoten sind binär. Sie nehmen für FALSCH den Wert 0 und für WAHR den Wert 1 an. Die übrigen Aktivierungsfunktionen sind Schwellenwertfunktionen. Die Schwellenwerte sind in den Knoten gegeben. Die Gewichte sind auf den Kanten aufgetragen. Die Ausgabe des Output-Knotens ist ebenfalls binär, wobei hier WAHR durch positive und FALSCH durch negative Werte ausgedrückt werden. Abbildung 3.1 zeigt die Modellierung einer einfachen ODER-Verknüpfung. Die Netzeingabe  $x_3$  des Output-Knoten, die Ausgabe des Netzwerks, ergibt sich aus den Eingaben der Input-Knoten  $x_1$  und  $x_2$  und den Gewichten  $w_1 = w_2 = 1$  zu

$$x_3 = w_1x_1 + w_2x_2 = x_1 + x_2 .$$

Nimmt einer der Input-Knoten oder nehmen beide den Wert 1 an, so wird der Schwellenwert von 0,5 überschritten und die positive Netzeingabe  $x_3$  wird an die Umwelt weitergegeben.

Abbildung 3.1: Neuronales Netzwerk für eine ODER-Verknüpfung

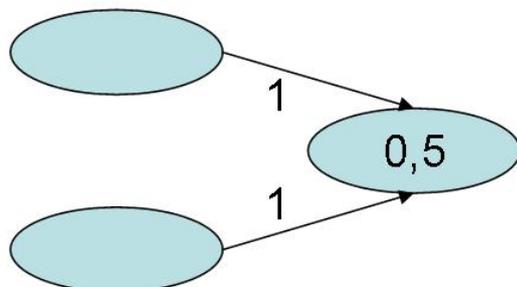
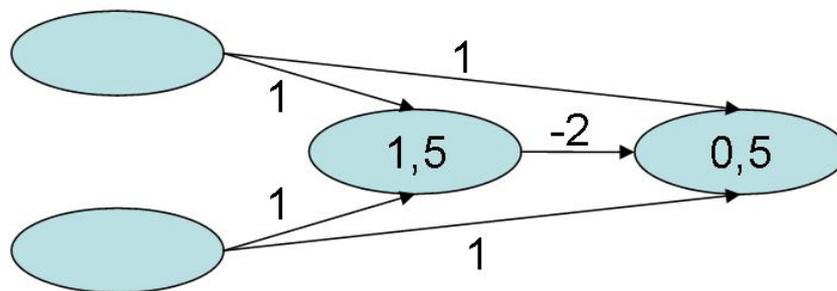


Abbildung 3.2 zeigt die Modellierung einer Entweder-Oder-Verknüpfung. Das Netz enthält einen Hidden-Knoten, dessen Schwellenwert von 1,5 dann überschritten wird, wenn beide Input-Knoten WAHR sind, also den Wert 1 annehmen. Durch die Gewichtung der Verknüpfung des Hidden-Knotens mit dem Output-Knoten von  $-2$  ist die Netzeingabe des Outputknoten in diesem Fall 0. Ansonsten gleicht die Modellierung der zuvor beschriebenen ODER-Verknüpfung.

Abbildung 3.2: Neuronales Netzwerk für eine Entweder-Oder-Verknüpfung



Über neuronale Netzwerke lassen sich komplexe Zusammenhänge auch nicht-linearer Natur modellieren. Von entscheidender Bedeutung ist dabei, dass über die Zusammenhänge im Vorfeld keine Annahmen getroffen werden müssen. In der Modellierungsphase werden nur Knoten und Informationsflüsse sowie Anfangswerte für die Gewichte festgelegt.

Im Anschluss wird das Netzwerk in einem Lernprozess gemäß einer Lernvorschrift verändert. Die häufigste Form ist die Veränderung der Gewichte der Verbindungen und der Schwellenwerte. Auch eine Änderung der Netzwerk-Topologie durch Hinzufügen oder Löschen von Knoten oder Verbindungen sind in fortgeschritteneren Verfahren möglich.

In der Backpropagation werden die Schwellenwerte über spezielle Neuronen ebenfalls als Gewichte modelliert. Für verschiedene Muster, die die Eingaben und die gewünschten Ausgaben vorgeben, werden in einem rückwärtsgerichteten Prozess die Gewichte so angepasst, dass der mittlere quadratische Fehler minimiert wird.

Nach der Lernphase kann das Netzwerk zur Prognose verwendet werden. Im Falle operationeller Risiken werden Risiko- und Geschäftsumfeldfaktoren als Input-Knoten und die operationellen Verluste als Output-Knoten modelliert. Der Vorteil neuronaler Netze ist die hohe Anpassungsfähigkeit, die eine Modellierung nicht-linearer Zusammenhänge und Abhängigkeiten der Variablen erlaubt, ohne dass diesbezüglich Annahmen getroffen werden müssen. In der Modellierungsphase muss nur eine grobe Auswahl der Input-Knoten erfolgen.

Desweiteren liefern die Netze auch bei verunreinigten oder unvollständigen Daten gute Ergebnisse.

Problematisch ist die für die Lernphase notwendige große Anzahl von Mustern. In der Praxis werden Modelle mit einer großen Anzahl von meist hunderten Neuronen verwendet. Die kurzen Datenhistorien operationeller Verluste und der zugehörigen Faktoren des Geschäfts- und Kontrollumfeldes werden für die selbstständige Kalibrierung in naher Zukunft nicht ausreichen. Auch werden schwerwiegende Verlustereignisse, die nur selten auftreten, nicht ausreichend erfasst. Daher sind neuronale Netzwerke nicht für die Bestimmung einer Kapitalanforderung geeignet und werden von den Aufsichtsbehörden als solche nicht genehmigt (vgl. Cruz 2002).

Die komplexe und wenig transparente Kalibrierung größerer Netzwerke erlaubt keine Rückschlüsse auf den Einfluss der Input-Knoten auf die Ausgabe des Netzes. Daher sind sie auch für die Gewinnung von Erkenntnissen über die Ursachen operationeller Verluste für das Risikomanagement ungeeignet.

### 3.3.3 Bayes-Netzwerke

Ein Bayes-Netzwerk ist ein gerichteter, azyklischer Graph, in dem die Abhängigkeiten der Risikotreiber und des Risikos über mehrere Ebenen abgebildet werden. In den Knoten werden Zufallsvariablen modelliert, deren Abhängigkeiten in den Kanten zum Ausdruck kommen. Die modellierten Zufallsvariablen müssen diskreten Verteilungen folgen oder einer diskreten oder kontinuierlichen parametrischen Familie angehören, deren Parameter gemäß dem Bayes'schen Verständnis selbst Zufallsvariablen sind. Die Zufallsvariablen der Anfangsknoten bilden die Risikotreiber ab. Sie werden über weitere Knoten mit dem oder den Endknoten verbunden, die in Form von Risikoindikatoren das Risiko widerspiegeln. Hier liegt der Vorteil der Bayes-Netzwerke gegenüber Regressionsmodellen, in denen nur direkte Abhängigkeiten modelliert werden können. Im Vergleich zu neuronalen Netzen bilden die Abhängigkeiten das Verständnis der Wirklichkeit des Modellierers ab und stellen nicht nur Informationsflüsse im Prozess der Schlussfolgerung dar (vgl. Adusei-Poku 2005).

Im ersten Schritt wird ein Prozess in Aktivitäten zerlegt und für jede Aktivität mögliche Abhängigkeiten, Risiken und Risikofaktoren bestimmt. Aus der resultierenden Liste wird der Prozess mit den wichtigen Variablen als Knoten über ein Netzwerk modelliert. Im Anschluss folgt die Validierung der modellierten Struktur. Typischerweise werden Verlusthäufigkeit und Verlusthöhe in getrennten Netzen als Endknoten modelliert. Die Abhängigkeiten werden über die bedingten Wahrscheinlichkeiten zum Vorgängerknoten modelliert. Im zweiten Schritt müssen die (unbedingten) Verteilungen der Anfangsknoten und die bedingten Wahrscheinlichkeiten der restlichen Knoten von Experten oder aus vorliegenden Daten geschätzt werden.

Über das Bayes'sche Theorem können nun sukzessiv alle unbedingten Wahr-

scheinlichkeiten in den Knoten errechnet werden. Vor allem von Interesse sind die unbedingten Verteilungen der Endknoten.

Zusätzlich können Szenarien erstellt werden, indem die Variable eines Knotens fixiert oder die Verteilung der Zufallsvariablen verändert wird. Zum Beispiel kann eine zusätzliche Kontrolle die Wahrscheinlichkeiten eines Risikofaktors in einem Knoten ändern. Die Auswirkungen auf den Endknoten sind nach erneuter Berechnung der Wahrscheinlichkeiten im Netzwerk sichtbar. Verschiedene Kontrollen können auf ihre Effektivität hin geprüft werden. Ebenfalls können Aussagen darüber getroffen werden, welche Situationen zu einem Zustand des Endknotens führen. Dazu wird der Zustand des Endknotens fixiert und die *a posteriori*-Verteilungen der Vorgängerknoten bestimmt. Auf diese Weise lassen sich Eskalationsstufen der Vorgängerknoten ermitteln, die das Einschreiten verschiedener Managementebenen hervorrufen.

Um eine Kostenfunktion erweitert, entsteht ein Bayes-Entscheidungsnetzwerk, mit dem die Effizienz verschiedener Kontrollen für das Risikomanagement evaluiert werden kann.

Je mehr Vorgänger für einen Knoten existieren, desto umfangreicher und schwieriger werden die Schätzungen der bedingten Wahrscheinlichkeiten und die Berechnung des Netzwerks. Aus diesem Grund sollte die Modellierung auf die wichtigsten und relevanten Knoten beschränkt erfolgen (vgl. Alexander 2003a). Cruz (2002) hält Messung und Steuerung operationeller Risiken mit Bayes-Netzwerken daher nur für wenige und kurze Prozesse für praktikabel. Ein kurzes Beispiel enthält Alexander (2003a). Eine ausführliche Darstellung einer Fallstudie findet sich in Adusei-Poku (2005).

Ein Vorteil der Netzwerke ist die Integration der Geschäftsfeld- und Kontrollumgebung in die Kapitalallokation. Dadurch wird zum einen die Risikoquantifizierung zukunftsgerichtet, zum anderen können die Netzwerke wichtige Informationen für das Risikomanagement liefern. Weitere Vorteile sind die mögliche Berücksichtigung aller anderen in Basel II geforderten Elemente (interne und externe Daten und Szenarien) und die explizite Modellierung der Risikotreiber und ihrer Abhängigkeiten.

Problematisch sind vor allem die Subjektivität der Expertenschätzungen und die hohe Komplexität, die schon für kurze Prozesse schnell erreicht wird.

### 3.4 Scorecard-Ansätze

Als Scorecard-Ansätze werden in der Literatur oft Ansätze zur Einbindung von Expertenwissen in Verlustverteilungsansätze (LDA) über Selbstbeurteilungen verstanden. Davon zu unterscheiden sind reine Scorecard-Ansätze, die über eine Bewertung von Risiken und Kontrollen in Selbstbeurteilungen zu einer Kapitalanforderung gelangen. Dabei dienen Verlustdaten als Hilfe zur Bewertung der Risiken und Kontrollen. Die Ergebnisse werden aber selbstständig zu einer Kapitalanforderung über Anpassungen einer initialen An-

forderung aggregiert und nicht als Eingabe in einen LDA verwendet.

Scorecards umfassen eine Liste der Risiken mit je einem Verantwortlichen, der Eintrittswahrscheinlichkeit und dem möglichen Verlust. Weiter werden den Risiken Kontrollen zugeordnet, die jeweils mit einem Verantwortlichen und der Auswirkung der Kontrolle erfasst werden. Oft werden ebenfalls Indikatoren erfasst, die eine Überwachung der Risiken und Kontrollen im Zeitablauf erlauben (vgl. Blunden 2003).

Die Trennung der Bewertung der Risiken und Kontrollen hat den Vorteil, dass ein tieferes Verständnis über die Effektivität und Effizienz verschiedener Kontrollen gewonnen wird. Daher eignen sich Scorecard-Ansätze besonders für das Management der Risiken und die Ressourcen-Allokation. Die Ansätze quantifizieren das Risiko in direkter Verbindung zu der Kontrollumgebung der Bank.

Die Subjektivität der Bewertung wird durch die Einbeziehung von Verlustdaten in die Identifikation der Risiken und den Bewertungsprozess und den Abgleich der Scorecards mit tatsächlichen Verlusten in einem Validierungsprozess gemindert. Der Vorteil der Beurteilung durch Experten ist, dass die Risiken und Kontrollen zukunftsgerichtet bewertet werden können. Im Vergleich zu Ansätzen der Bewertung über historische Daten können und sollen Änderungen der Umgebung berücksichtigt werden. Über Risikoindikatoren und auftretende Verluste findet ein dauerhafter Abgleich zwischen den Erwartungen und der Wirklichkeit statt.

Problematisch ist die Überführung der qualitativen Bewertungen in quantitative Größen. Alexander (2003b) erhebt die Verlusthäufigkeit in Intervallen und bestimmt den Erwartungswert über Szenarios im Vergleich mit historischen Verlustdaten. Alternativ zur direkten Erhebung der Häufigkeit kann in einigen Fällen auch die Verlustwahrscheinlichkeit einer Transaktion erhoben werden. In Kombination mit der aversierten Zahl der Transaktionen ergibt sich die Häufigkeit.

Für die Verlusthöhe muss neben dem Erwartungswert zusätzlich die Unsicherheit der Prognose erhoben werden. Da Quantile invariant unter monotonen Transformationen sind, schlägt Alexander (2003b) eine Bewertung über die Differenz eines hohen Quantils und dem Erwartungswert in Einheiten des Erwartungswertes vor.

Die Bewertung der Kontrollen muss analog dazu die Wahrscheinlichkeit für die Funktion bzw. das Versagen der Kontrolle und die Verminderung der Verluste durch die Kontrolle umfassen.

Von besonderer Bedeutung im Rahmen von Scorecard-Ansätzen sind die Qualität des Fragebogens und die Einstellung der Organisation gegenüber Verlusten. Sollen verlässliche Daten aus den Selbstbewertungen gewonnen werden, muss die Organisation eine realistische Risikobewertung des Verantwortlichen fördern und darf hohe Risikoeinschätzungen nicht bestrafen. Ansätze zur Ausgestaltung der Fragebögen finden sich z.B. in Anders (2003) und Anders und Sandstedt (2003).

Sind die Verteilungen der Risiken und Kontrollen geschätzt, kann im Anschluss das Risiko der Bank simuliert werden. Details hierzu finden sich in Blunden (2003). Häufiger werden Scorecard-Ansätze verwendet, um eine initiale Kapitalanforderung der Bank auf die Geschäftsbereiche und Risikotypen zu verteilen oder bestehende Kapitalanforderungen der Bereiche an die geänderten Bedingungen anzupassen.

Im ersten Anwendungsfall wird eine initiale Kapitalanforderung *top-down* auf die Geschäftsbereiche und Risikoklassen verteilt. Die initiale Kapitalanforderung kann dabei aus einem LDA, dem Basisindikator- oder Standardansatz oder über Benchmarks bestimmt werden. Als Benchmarks kommen Kapitalhinterlegungen anderer vergleichbarer Institute, das Verhältnis zum Gesamtkapital oder Kapitalanforderungen anderer Risikoarten in Frage. Dabei ist zu beachten, dass einige Benchmarks das individuelle Risikoprofil der Bank nicht adäquat widerspiegeln. Die in den Scorecards gewonnenen Bewertungen dienen als Schlüssel zur Verteilung des Risikokapitals.

Im zweiten Fall wird die Kapitalanforderung der Geschäftsbereiche und der Risikoklassen in einem fortschreitenden Prozess an die gegenwärtigen Bedingungen angepasst. Dabei werden die Veränderungen der Bewertungen auf die Kapitalanforderung übertragen. Quantitative Größen wie der erwartete Schaden können dabei als Schlüssel verwendet werden. Die gesamte Kapitalanforderung ergibt sich *bottom-up* als Summe der einzelnen angepassten Anforderungen in den Risikoklassen.

In Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2001) wird eine Kombination beider Verfahren bevorzugt. Um die quantitativen Anforderungen zu erfüllen, soll die initiale Kapitalanforderung über einen LDA oder Standardansatz bestimmt werden. Im Anschluss wird die Anforderung über das erste Verfahren auf die Geschäftsbereiche und Risikoklassen verteilt und dann aufgrund der qualitativen Bewertung der Geschäftsumfeld- und Kontrollumgebung angepasst. Dadurch soll die Bestimmung der Kapitalanforderung zukunftsgerichteter gestaltet werden. Haubenstock und Hardin (2003) schlagen eine Anpassung der über einen LDA gewonnenen Kapitalanforderung von bis zu 20% vor. Die Faktoren der Anpassung sind dort aber nicht objektiv begründet und sind daher als willkürlich anzusehen. Currie (2004) gibt einige Praxisbeispiele, in denen Scorecard-Ansätze in Verbindung mit LDA-Ansätzen zum Einsatz kommen.

## Kapitel 4

# Ausblick

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf Probleme bei der Kalibrierung der Modelle der fortgeschrittenen Ansätze (AMA). Probleme ergeben sich dabei sowohl auf Ebene der einzelnen Risiken in den einzelnen Geschäftsbereichen als auch bei der Aggregation der Einzelrisiken zu einem Risikoprofil des Instituts.

Die Quantifizierung der Risiken setzt ihre vorherige Identifizierung voraus. Auf Probleme der Identifizierung wird in der Arbeit nicht näher eingegangen. Jedoch stellt die Erfassung aller möglichen Risiken eines der Probleme dar, die auch in Zukunft bestehen bleiben. Historische Verlustdaten können nur einen Teil der Risiken abdecken, die für die Zukunft relevant sind. Die vollständige Identifizierung von Risiken, die sich noch nicht in Verlusten ausgedrückt haben, ist nahezu unmöglich. Solche Risiken können von Experten nur vermutet werden, und auch ihre Quantifizierung muss auf subjektiven Einschätzungen beruhen. Da nie davon ausgegangen werden kann, dass alle Risiken erfasst sind und sich das Portfolio operationeller Risiken ständig ändert, muss die Identifizierung sorgfältig und in einem kontinuierlichen Prozess erfolgen. Detaillierte Ansätze zur Risikoerfassung werden in Minz (2004) dargestellt.

Die größte Herausforderung der Modelle zur Quantifizierung der Risiken liegt in der Erfassung seltener, aber hoher Verluste, die die Bank in ihrer Existenz gefährden können. Von Natur aus, liegen nicht ausreichend viele Beobachtungen vor, um über sie Modelle für diese Risiken zu kalibrieren. Lösungsansätze bieten die Extremwerttheorie und die Einbindung externer Daten. Die Ansätze werden in der Arbeit ausführlich dargestellt. Zur Einbindung externer Daten ist es notwendig, für die Bank relevante Daten auszuwählen und diese an das Risikoprofil der Bank anzupassen, zu skalieren. Die bestehenden Modelle hierzu weisen einen geringen Erklärungsgrad auf und müssen in Zukunft weiterentwickelt werden. Dazu ist es notwendig, Faktoren zu bestimmen, die die Höhe und die Häufigkeit von Verlusten wesentlich beeinflussen. Die Faktoren müssen auf Ebene der Einzelrisiken bestimmt werden, da

für unterschiedliche Risiken verschiedene Faktoren relevant sein können. Ein Faktor kann für unterschiedliche Risiken verschiedene Auswirkungen haben. Die Identifizierung solcher Faktoren ist ebenfalls für Kausalmodelle und die Kontrolle und das Management von Risiken von entscheidender Bedeutung. Auch die Modellierung der Verlustverteilungen in Verlustverteilungsansätzen sollte in Abhängigkeit dieser Faktoren erfolgen, soweit sie bekannt sind. Ein Schwerpunkt zukünftiger Arbeiten muss in der Identifizierung solcher Faktoren und der Untersuchung der Auswirkungen auf das Risiko liegen.

Alternative Modelle wie die in der Arbeit vorgestellten Scorecard-Ansätze oder Bayes-Netzwerke sollen helfen, das Problem der geringen Datengrundlage zu überwinden. In den Ansätzen wird versucht, eine Verlustverteilung der Risiken abzuleiten, indem der Schwerpunkt auf das Wissen von Experten über Abhängigkeiten oder über die Verteilung selbst statt auf Verlustdaten gelegt wird. Die dargestellten Ansätze sind allgemein gehalten und können auf viele Risiken angewandt werden. Wegen der heterogenen Risiken, die unter den Begriff operationeller Risiken fallen, sind in speziellen Fällen andere Modelle geeigneter. Zum Beispiel schlägt Cruz (2002) vor, Risiken, die aus der Konzentration von Wissen erwachsen, über einen Indikator, den Gini-Koeffizienten als Maß der Konzentration, zu messen.

Ein weiteres Problem stellt die Kontextabhängigkeit operationeller Risiken dar. Die unter dem operationellen Risiko zusammengefassten Risiken sind in unterschiedlicher Weise von der Organisation und dem Umfeld abhängig. Die dortige Dynamik überträgt sich auf das Risikoprofil der Bank. Die Quantifizierung, Bewertung und das Management der Risiken muss daher genau wie die Identifizierung in einem ständigen Prozess erfolgen. Zusätzlich wirft die Kontextabhängigkeit die Frage auf, inwieweit historische Verlustdaten für die Zukunft relevant sind. Für einzelne Risiken können daher Verlustverteilungsansätze auch dann nicht geeignet sein, wenn ausreichende Verlusthistorien vorliegen. Alternative Ansätze oder die Verwendung mit externen Daten kombinierter kurzer Verlusthistorien müssen für kontextabhängige Risiken in Erwägung gezogen werden.

Wichtiger als die genaue Quantifizierung ist die durch die Regelungen in Basel II erreichte erhöhte Aufmerksamkeit gegenüber operationellen Risiken. Die Auseinandersetzung mit der neuen Risikoart im Rahmen der Identifizierung, der Modellierung und der Berichterstattung führt zu einem genaueren Verständnis potentieller Risiken und hilft Schwachstellen in Prozessen und Systemen zu beseitigen. Auf diese Weise ist das Management oder der Transfer der Risiken möglich. Die Organisation muss über alle Hierarchieebenen eine *no-blame*-Kultur entwickeln, die eine Auseinandersetzung mit potentiellen Risiken fördert. Die Berücksichtigung operationeller Risiken muss zum Tagesgeschäft gehören und in allen Entscheidungsprozessen erfolgen.

Die Defizite der Modelle, vor allem im Bezug auf die Kontextabhängigkeit und die Möglichkeit nicht erfasster Risiken, müssen bei der Interpretation der Ergebnisse beachtet werden.

# Anhang A

## Kohärente Risikomaße

Ein Risikomaß ist eine Funktion  $\varrho$ , die einer Position mit Verlust  $X$  eine reelle Zahl  $\varrho(X)$  zuordnet. Der Verlust  $X$  kann dabei deterministisch sein oder auch eine Zufallsvariable. Ein Risikomaß sollte in Geldeinheiten ausgedrückt werden. Nur so ist eine Deckung durch Kapital, eine adäquate Berücksichtigung in der Preisbildung und die Evaluierung von Versicherungsprämien möglich. Das Risiko  $\varrho(X)$  kann dann als das nötige Kapital angesehen werden, das vorgehalten werden muss, um eine Risikoposition für einen (internen oder externen) Kontroller akzeptabel zu machen. Eine Position aus Kapital und Verlust  $X$  mit  $\varrho \leq 0$  ist demnach akzeptabel.

In diesem Abschnitt werden die Anforderungen an ein kohärentes Risikomaß nach Artzner et al. (1999) beschrieben. Die Axiome werden darin ökonomisch begründet und sind entsprechend leicht nachzuvollziehen. In Anlehnung an McNeil et al. (2005) erfolgt eine abgewandelte Darstellung zum leichteren Verständnis. Es wird keine Diskontierung vorgenommen, und statt von zukünftigen Werten wird von Verlusten der Positionen über einen fixen Zeithorizont ausgegangen.

Damit  $\varrho$  kohärent ist, müssen die folgenden Axiome erfüllt sein. Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  bezeichnen dabei die Verluste aus zwei eingegangenen Positionen.

**Translationsinvarianz:** Für alle  $l \in \mathbb{R}$  gilt

$$\varrho(X + l) = \varrho(X) + l.$$

In Worten besagt dies, dass durch Hinzufügen eines deterministischen Verlustes  $l$  das Risiko um genau diesen Betrag steigt. Die Translationsinvarianz ist die Grundlage für eine Kapitaldeckung des eingegangenen Risikos. Eine Position mit  $\varrho > 0$  wird durch Hinzufügen von Kapital akzeptabel.

**Subadditivität:** Es gilt

$$\varrho(X + Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y).$$

Diese Anforderung besagt, dass das Risiko eines Portfolios aus zwei Positionen maximal der Summe der einzelnen Risiken entspricht. Dies folgt aus der allgemein akzeptierten Theorie der Diversifikation von Risiken. Allerdings ist die Anforderung der Subadditivität die am stärksten kritisierte des Axiomensystems. Im Licht von Firmenzusammenschlüssen erscheint eine Steigerung des Risikos aus zusammengefassten Positionen durchaus denkbar, die aus den praktischen Schwierigkeiten des Zusammenschlusses erwächst. Dies ist gerade für regulatorische Kapitalanforderungen von besonderer Bedeutung. McNeil et al. (2005) weisen auf die Möglichkeit der Reduzierung der Kapitalanforderung durch die rechtliche Aufspaltung eines Instituts hin, wenn von der Aufsicht ein Risikomaß akzeptiert wird, das die Subadditivität nicht erfüllt.

**Positive Homogenität:** Für alle  $\lambda > 0$  gilt

$$\varrho(\lambda X) = \lambda \varrho(X).$$

Da bei der Vergrößerung einer Position keine Diversifikationseffekte auftreten können, muss das Risiko entsprechend steigen. Im Sinne des aus einer Konzentration erwachsenen Liquiditätsrisikos erscheint eine überproportionale Steigerung sinnvoll. Dies würde aber der Anforderung der Subadditivität widersprechen.

**Monotonie:** Für  $X \leq Y$  gilt

$$\varrho(X) \leq \varrho(Y).$$

Die Anforderung ist intuitiv verständlich, da ein geringerer möglicher Verlust ein geringeres Risiko birgt.

Der Value-At-Risk (VaR) zum Niveau  $p$  ist als  $p$ -Quantil der Verlustverteilung über eine Halteperiode definiert. Als solcher erfüllt er die Anforderungen der Translationsinvarianz, der positiven Homogenität und der Monotonie. Die Anforderung der Subadditivität ist hingegen im Allgemeinen nicht erfüllt. Beweise dazu finden sich in Artzner et al. (1999). McNeil et al. (2005) zeigen, dass für elliptische Verlustverteilungen der VaR auch die Anforderung der Subadditivität erfüllt.

Shortfall-Risikomaße wie der Expected-Shortfall (ES) erfüllen alle Anforderungen an ein kohärentes Risikomaß (vgl. McNeil et al. 2005). Dazu gehört auch der *Operational-VaR* nach Cruz (2002), da er auf einer durch die Überschreitung eines Schwellenwertes bedingten Verlustverteilung beruht.

## Anhang B

# Methoden zur Parameterschätzung

Im Allgemeinen ist die Verteilung, die den Verlusten zugrunde liegt, nicht bekannt. Für die Methoden der Risikomessung, die auf einer Verlustverteilung beruhen, ist es daher notwendig, die Verteilung mit Hilfe der vorliegenden Daten zu schätzen. Die historischen Daten werden dabei als Stichprobe der unbekanntem Grundgesamtheit aller Verluste angenommen. Weiter wird meist vorausgesetzt, dass die Stichprobe aus unabhängigen Realisationen identisch verteilter Zufallsvariablen besteht. Dies ist oft eine problematische Annahme und setzt unter Umständen eine Bereinigung der Daten voraus. Die Datenbereinigung wird in Abschnitt 3.1.4 näher behandelt. Im Folgenden wird zur einfachen Darstellung der Konstruktion von Schätzmethoden von einer Stichprobe aus iid Daten ausgegangen. Die Ausführungen basieren im Wesentlichen auf Bol (1999), Hipp (2000) und Smith (1990).

Man unterscheidet zwischen nicht-parametrischen und parametrischen Verfahren. Bei nicht-parametrischen Methoden, z.B. der Momentenmethode, werden Kenngrößen ohne Verteilungsannahme ermittelt. Soll eine theoretische Verteilung an die Beobachtungen angepasst werden, so werden die benötigten Parameter über die ermittelten Kenngrößen bestimmt. Bei den parametrischen Verfahren werden Annahmen über die Verteilung vorausgesetzt. Oft beschränkt man sich auf den Typ einer Verteilung, deren Parameter dann geschätzt werden müssen. Die Maximum-Likelihood- (ML-) Methode setzt eine Verteilungsannahme voraus und ist daher parametrisch. Kenngrößen werden nach der Ermittlung der Parameter über die angepasste Verteilung bestimmt.

Eine Schätzfunktion  $\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n)$  liefert für eine Stichprobe  $x_1, \dots, x_n$  des Umfangs  $n$  den Schätzwert für den Parameter  $\gamma$ . Da Schätzer Funktionen der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , der Stichprobe, sind, sind sie selbst ebenfalls Zufallsvariablen. Ihre Verteilungen hängen von dem wahren Parameter ab, was oft durch das Subskript  $\gamma$ , zum Beispiel beim Erwartungswert, ver-

deutlich wird.

Im Folgenden werden zunächst wünschenswerte Eigenschaften von Schätzfunktionen beschrieben. Danach wird auf einige gängige Verfahren zur Konstruktion von Schätzern eingegangen. Für weitergehende Ausführungen wird auf die angegebenen Quellen verwiesen.

## B.1 Eigenschaften von Schätzfunktionen

Im Folgenden werden Eigenschaften der Schätzfunktionen dargestellt, die deren Güte ausdrücken.

**Erwartungstreue:** Eine Schätzfunktion deren Erwartungswert gleich dem wahren, unbekanntem Parameter ist heißt erwartungstreu oder unverzerrt. Formal ausgedrückt ist die Schätzfunktion  $\hat{\gamma}$  erwartungstreu für den Parameter  $\gamma$ , falls

$$E_{\gamma}[\hat{\gamma}(X_1, \dots, X_n)] = \gamma \quad \text{für alle } \gamma$$

gilt. Die Differenz  $E_{\gamma}[\hat{\gamma}(X_1, \dots, X_n)] - \gamma$  heißt systematischer Fehler oder Bias. Oft ist ein Schätzer nur asymptotisch erwartungstreu für  $n \rightarrow \infty$ , d.h. mit steigendem Stichprobenumfang.

**Effizienz:** Schätzfunktionen sollen eine möglichst kleine Varianz aufweisen. Für zwei Schätzfunktionen  $\hat{\gamma}_1$  und  $\hat{\gamma}_2$  ist diejenige effizienter, deren Varianz bei gleichem Stichprobenumfang kleiner ist.  $\hat{\gamma}_1$  ist also effizienter als  $\hat{\gamma}_2$ , wenn

$$\text{Var}_{\gamma}[\hat{\gamma}_1(X_1, \dots, X_n)] \leq \text{Var}_{\gamma}[\hat{\gamma}_2(X_1, \dots, X_n)] \quad \text{für alle } n.$$

Im Durchschnitt liegen die Schätzwerte der effizienteren Funktion näher am wahren Wert. Aus einer Menge von Schätzfunktionen heißt diejenige effizient, die die kleinste Varianz aufweist. Schätzfunktionen sind oft nur asymptotisch, d.h. mit steigendem Stichprobenumfang, effizient.

**Konsistenz:** Eine Schätzfunktion ist konsistent, wenn ihr Schätzwert mit steigendem Stichprobenumfang  $n \rightarrow \infty$  stochastisch gegen den wahren Wert konvergiert. Das heißt, die Varianz der Verteilung des Schätzers sinkt bei steigendem Stichprobenumfang. Formal ausgedrückt ist eine Schätzfunktion  $\hat{\gamma}$  konsistent, wenn für beliebiges  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\gamma}(X_1, \dots, X_n) - \gamma| \geq \epsilon) = 0.$$

Konsistenz setzt mindestens asymptotische Erwartungstreue voraus.

**Suffizienz und Robustheit:** Diese Eigenschaften werden nur selten angegeben und sollen auch hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden. Nutzt eine Schätzfunktion alle in der Stichprobe vorliegenden Informationen, so ist sie suffizient. Ein Schätzer wird als robust bezeichnet, wenn er nicht sensitiv gegenüber Ausreißern ist.

## B.2 Momentenmethode

Bei der Momentenmethode werden die empirischen Momente in die Formel zur Ermittlung der entsprechenden Momente der unbekanntenen Verteilung eingesetzt. Das Gleichungssystem wird nach den gesuchten Parametern gelöst.  $\gamma$  stellt im Folgenden den  $m$ -dimensionalen Vektor der gesuchten Parameter dar. Das empirische Moment  $k$ -ter Ordnung ist durch

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$$

gegeben. Das entsprechende Moment der Zufallsvariablen  $X$  ist eine Funktion von  $\gamma$  und bestimmt sich zu

$$m_k(\gamma) = E_\gamma(X^k).$$

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\hat{m}_k = m_k(\gamma) \quad k = 1, \dots, m$$

bildet die Schätzfunktion  $\hat{\gamma}$ .

Daraus ergibt sich die Voraussetzung, dass mindestens  $m$  Momente existieren müssen, also so viele, wie Parameter gesucht werden. Dies ist z.B. für die GPD mit  $\xi > 0,5$  nicht der Fall, da die Momente zweiter und höherer Ordnung nicht existieren (vgl. 3.1.1.4).

## B.3 Methode wahrscheinlichkeitsgewichteter Momente

Statt gewöhnliche Momente für die Schätzung der Parameter heranzuziehen, schlagen Hosking et al. (1985) vor, wahrscheinlichkeitsgewichtete Momente (PWM) zu verwenden. Allgemein sind die PWM einer Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F(x)$  definiert als

$$M_{p,r,s} = E(X^p [F(X)]^r [1 - F(X)]^s) \quad p, r, s \in \mathbb{R}.$$

Für  $r = s = 0$  und  $p = 1, 2, \dots$  entsprechen sie also den gewöhnlichen Momenten. Der Vorteil gegenüber der Momentenmethode liegt darin, dass die

funktionale Beziehung zwischen den PWM und den zu schätzenden Parametern für  $p = 1$  in der Regel einfacher ist. Eine Verteilung ist ausreichend beschrieben, wenn  $r \in \mathbb{N}$  und  $s = 0$  oder  $s \in \mathbb{N}$  und  $r = 0$ . Im Folgenden werden PWM mit  $p = 1, r = 0$  und  $s \in \mathbb{N}$  betrachtet. Dies entspricht der gewöhnlichen Vorgehensweise im Fall einer GPD-Verteilung. Will man Parameter einer GEV-Verteilung schätzen, so betrachtet man stattdessen PWM mit  $p = 1, r = 0$  und  $r \in \mathbb{N}$ .

Aus den vorliegenden Daten wird eine geordnete Beobachtungsfolge  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  gebildet und die PWM durch

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \quad \text{und}$$

$$\hat{\beta}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)(j-2)\dots(j-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} x_j \quad i > 0$$

geschätzt. Der Schätzer ist erwartungstreu. Alternativ dazu kann der asymptotisch effiziente Schätzer

$$\hat{\beta}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1 - p_{j,n})^r x_j$$

zur Anwendung kommen.  $p_{j,n}$  sind dabei parameterfreie Schätzwerte der Verteilungsfunktion  $F(x_j)$  der Form  $p_{j,n} = (j + \alpha)/(n + \delta)$ . Hosking et al. (1985) empfehlen  $\alpha = -0,35$  und  $\delta = 0$ . Smith (1990) weist auf die geringe Auswirkung von  $\alpha$  und  $\delta$  hin und schlägt  $\alpha = -0,5$  und  $\delta = 0$  vor.

Der zuerst dargestellte Schätzer der PWM ist unverzerrt, der zweite Schätzer nur konsistent (vgl. Hosking und Wallis 1987). Für  $\xi < 0,5$  ist der erste Schätzer asymptotisch normalverteilt. Für  $\xi > 1$  existieren die PWM nicht und die Methode kann nicht für eine Anpassung einer GPD-Verteilung herangezogen werden.

Wie bei der Momentenmethode wird nun aus den Formeln der theoretischen PWM der angenommenen Verteilung und den Schätzwerten aus den vorliegenden Daten ein Gleichungssystem gebildet und nach den gesuchten Parametern aufgelöst. Wieder muss sichergestellt sein, dass die PWM auch existieren. Für GPD-verteilte Zufallsvariablen mit  $\xi > 1$  ist dies nicht der Fall, und die Methode kann keine Anwendung finden (vgl. 3.1.1.4).

## B.4 Maximum-Likelihood-Methode

Die Idee der Maximum-Likelihood- (ML-) Methode ist, die Parameter so zu wählen, dass die realisierte Stichprobe in dem Sinne plausibel erscheint, dass die Beobachtungen mit großer Wahrscheinlichkeit auftreten können. Man unterstellt, dass die Zufallsvariablen der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  mit der Dichte

$f(x; \gamma)$  verteilt sind.<sup>1</sup> Es wird die Likelihood-Funktion

$$L_{x_1, \dots, x_n}(\gamma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \gamma)$$

gebildet, die es über alle möglichen Parameter  $\gamma$  zu maximieren gilt. Aus der strengen Monotonie der Logarithmusfunktion ergibt sich, dass das Maximum von  $L_{x_1, \dots, x_n}(\gamma)$  auch über die logarithmierte Likelihood-Funktion bestimmt werden kann.

$$\ln L_{x_1, \dots, x_n}(\gamma) = \ln \left[ \prod_{i=1}^n f(x_i; \gamma) \right] = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \gamma)$$

heißt Log-Likelihood-Funktion und ist in der Regel einfacher zu handhaben. Die Maximalstelle  $\hat{\gamma}$  bildet den Schätzwert des Parameters  $\gamma$ .

Im dargestellten Fall wurde von iid Daten ausgegangen. Prinzipiell ist die ML-Methode auch auf andere Fälle anwendbar, wenn bekannt ist, wie die Verteilung der Stichprobe von den Parametern abhängt. Allerdings wird sich die Maximierung der Likelihood-Funktion in den meisten solcher Fälle schwierig gestalten.

Ein großer Vorteil der ML-Methode ist, dass sie sich leicht auf komplexere Situationen anpassen lässt (vgl. Smith 1990). Zum Beispiel kann bei Vorliegen eines linearen Trends eines Parameters nach  $\mu_n = \alpha + \beta n$  das gleiche Vorgehen angewandt werden.  $\mu_n$  wird in der Likelihood-Funktion durch die angegebene Gleichung ersetzt. Statt eines Parameters  $\mu$  werden  $\alpha$  und  $\beta$  durch die ML-Methode bestimmt.

Oft ist eine analytische Lösung des Maximierungsproblems zu aufwändig oder nicht möglich. Deshalb wird auf numerische Verfahren zurückgegriffen, die das Problem iterativ lösen. Ein Beispiel, der EM-Algorithmus, wird in Hipp (2000) dargestellt. Da die Algorithmen das Problem iterativ lösen, werden Startwerte benötigt, die oft durch einfachere Methoden, z.B. die Momentenmethode, gewonnen werden. Zu beachten ist, dass die Ergebnisse lokale Minima sein können. Daher sollten gute Startwerte gewählt und eventuell mehrere Durchläufe mit verschiedenen Startwerten verglichen werden.

## B.5 Konfidenzintervalle und Standardfehler

Ein einzelner Punktschätzwert sagt nichts über die Güte der Schätzung aus. Daher werden Konfidenzintervalle gebildet, die zu einem gegebenen Konfidenzniveau den wahren Parameter überdecken. Alternativ wird zu einer (unverzerrten) Punktschätzung oft der Standardfehler angegeben, der der

---

<sup>1</sup>Hier wird von kontinuierlichen Zufallsvariablen ausgegangen. Das Vorgehen ist direkt auf den diskreten Fall übertragbar.

Varianz der Schätzfunktion entspricht. Dazu existieren verschiedene Vorgehensweisen, die im Folgenden dargestellt werden. Die Wahl des Verfahrens hängt dabei vor allem davon ab, ob die (asymptotische) Verteilung des Schätzers bekannt ist.

### B.5.1 Verteilung der Schätzfunktion

Ist die Verteilung oder die asymptotische Verteilung der Schätzfunktion bekannt und vom wahren Parameter unabhängig, so kann leicht ein Konfidenzintervall angegeben werden. Ist die Verteilung vom wahren Parameter abhängig, kann versucht werden, durch Transformationen zu einer vom wahren Parameter unabhängigen Verteilung zu gelangen.

Für viele Schätzfunktionen kann die Verteilung nach dem zentralen Grenzwertsatz durch die Normalverteilung approximiert werden. Problematisch dabei ist allerdings, dass keine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit getroffen werden kann. Daher ist unbekannt, wie weit das ermittelte Intervall vom wahren abweicht, und eine Aussage über die Güte ist nicht möglich. Gerade im Zusammenhang mit operationellen Risiken wird mit kleinen Datenmengen gearbeitet, so dass meist auf andere Verfahren zurückgegriffen werden sollte.

### B.5.2 Profil-Likelihood-Methode

Sind mehrere Parameter zu schätzen und wird zur Schätzung die ML-Methode angewandt, so können Konfidenzintervalle über die Profil-Likelihood-Methode approximiert werden. Die Idee der Vorgehensweise ist den Likelihood-Verhältnistest umzukehren. Sei  $L_{x_1, \dots, x_n}(\gamma)$  die Likelihood-Funktion und  $\Gamma$  der Parameterbereich. Die Nullhypothese sei  $H_0 : \gamma \in \Gamma_0 \subset \Gamma$ . Die Statistik des Likelihood-Verhältnistests ist durch

$$\lambda(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sup_{\gamma \in \Gamma_0} L_{X_1, \dots, X_n}(\gamma)}{\sup_{\gamma \in \Gamma} L_{X_1, \dots, X_n}(\gamma)}$$

gegeben. Für  $n \rightarrow \infty$  ist  $-2 \ln \lambda(X_1, \dots, X_n)$  asymptotisch  $\chi_v^2$ -verteilt. Dabei entspricht  $v$  den Freiheitsgraden, die Differenz der Anzahl der in der Nullhypothese spezifizierten Parameter und den Parametern in  $\Gamma$ . Das  $\alpha$ -Konfidenzintervall besteht nun aus allen Werten  $\gamma_0$ , für die die Nullhypothese mit Testniveau  $\alpha$  nicht abgelehnt wird. Daher ergibt sich das Intervall zu

$$\{\gamma_0 : \ln L_{x_1, \dots, x_n}(\gamma_0) \geq \ln L_{x_1, \dots, x_n}(\gamma^*) - 1/2 \cdot c_{v, 1-\alpha}\}.$$

Dabei bezeichnet  $c_{v, 1-\alpha}$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der  $\chi_v^2$  Verteilung und  $\gamma^*$  den Punktschätzwert.

### B.5.3 Resampling-Verfahren

Bei Resampling-Verfahren werden die Daten selbst herangezogen, um Konfidenzintervalle zu bilden. Dazu werden aus den Daten neue Stichproben generiert, auf die die Schätzfunktion dann angewendet wird. Die Angaben stammen aus Cruz (2002).

Beim Bootstrapping-Verfahren werden aus den Daten  $b$  neue Stichproben durch Ziehen mit Zurücklegen generiert. Der Stichprobenumfang  $m$  kann dabei größer oder kleiner sein als der ursprüngliche Umfang  $n$ . Aus den generierten Stichproben werden die Schätzwerte  $\hat{\gamma}_{m,i}$   $i = 1, \dots, b$  errechnet. Die asymptotische Varianz wird dann durch

$$\widehat{Var}(\hat{\gamma}) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b (\hat{\gamma}_{m,i} - \hat{\gamma}_n)^2$$

approximiert.  $\hat{\gamma}_n$  bezeichnet dabei den ursprünglichen Schätzwert.

Die Jackknife-Methode bildet aus  $n$  Beobachtungen  $n$  verschiedene Stichproben, indem je eine Beobachtung fallengelassen wird. Mit den resultierenden Stichproben werden wieder Schätzwerte gebildet und die Varianz approximiert.

## Anhang C

# Beispiel eines Verlustverteilungsansatzes

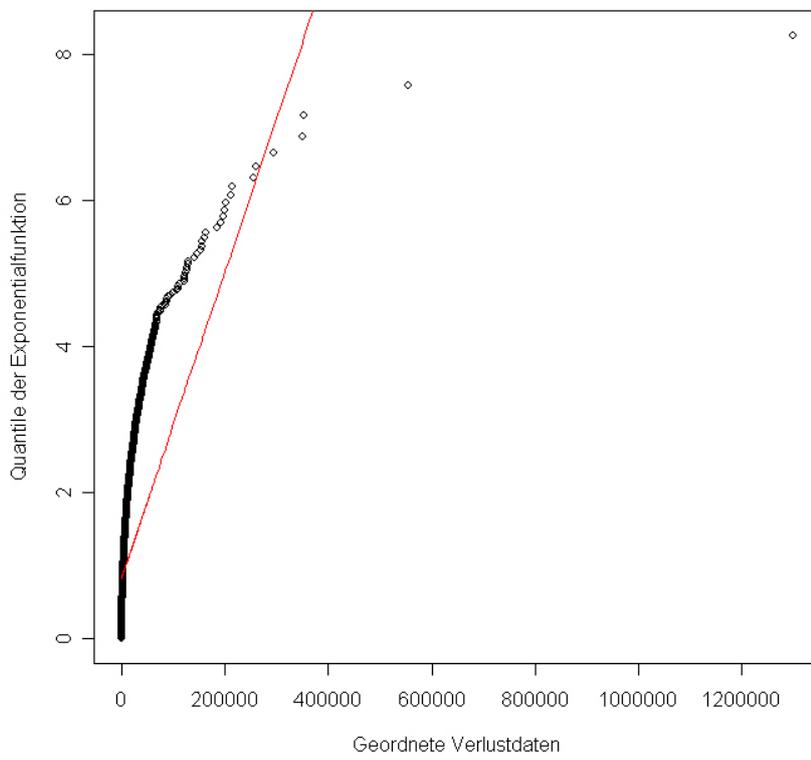
Im Folgenden soll das praktische Vorgehen bei einem Verlustverteilungsansatz für eine Risikotyp-Geschäftsfeld-Kombination anhand eines Beispiels erläutert werden. Es wurden mit Hilfe einer logarithmierten Normalverteilung Verluste generiert, deren Verteilung mit Hilfe der Extremwerttheorie approximiert wird. Das Beispiel orientiert sich an den auf monatlicher Basis aggregierten Betrugsdaten einer Bank, die in Cruz (2002) aufgeführt sind. Es wurde der Durchschnitt der monatlichen Verluste über fünf Jahre gebildet und dieser durch 20 Arbeitstage und drei Verlustfälle pro Tag geteilt. Der Erwartungswert der gewählten Verteilung zur Generierung der Verluste entspricht dem so errechneten durchschnittlichen Verlustwert. Die Anzahl der Verluste wurde auf täglicher Basis über fünf Jahre hinweg durch eine Poisson-Verteilung mit  $\lambda = 3$  ermittelt. Dadurch ergeben sich 3878 Verlustfälle in 1300 Tagen.

### C.1 Verlusthöhenverteilung: POT-Methode

Einen ersten Anhaltspunkt zur Gestalt der Verteilung der Verlusthöhe liefert der QQ-Plot, in dem Quantile der Exponentialverteilung mit  $\lambda = 1$  über den geordneten Verlustdaten abgetragen werden. Eine Gerade würde eine Exponentialverteilung als Approximation nahelegen. Eine konkave Abweichung von einer Geraden, wie in Abbildung C.1, lässt auf eine Verteilung schließen, deren Dichte am Ende der Verteilung langsam abfällt. Dies spricht für eine Approximation mit Gestaltparameter  $\xi > 0$ . Eine konvexe Abweichung würde hingegen auf eine am Ende schneller abfallende Dichte mit  $\xi < 0$  hindeuten.

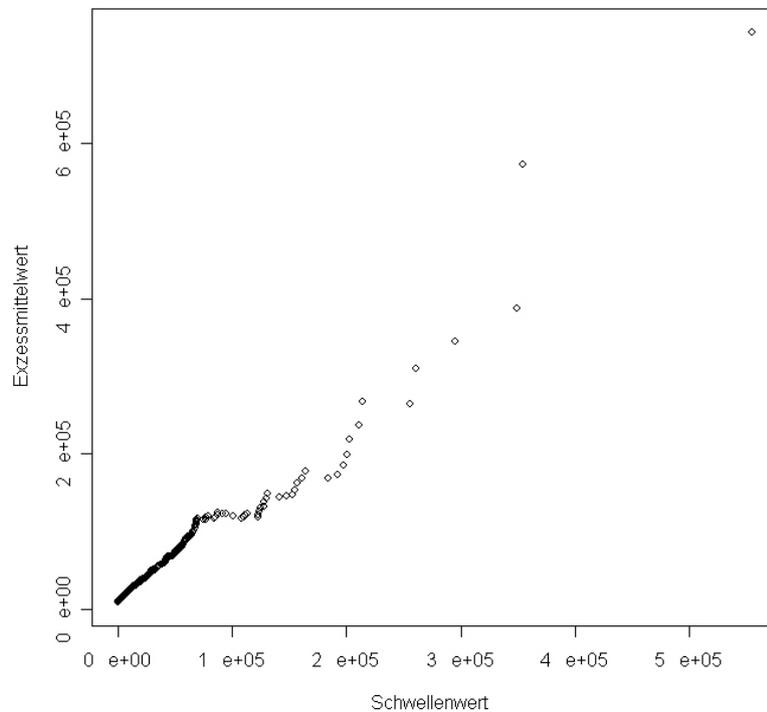
Zusätzlich wird die empirischen Exzessmittelwertfunktion (SMEF) über den Verlustpunkten abgetragen. In Abbildung C.2 zeigt sich der annähernd gerade Verlauf der SMEF. Da GPD-Verteilungen die einzigen Verteilungen sind,

Abbildung C.1: QQ-Plot



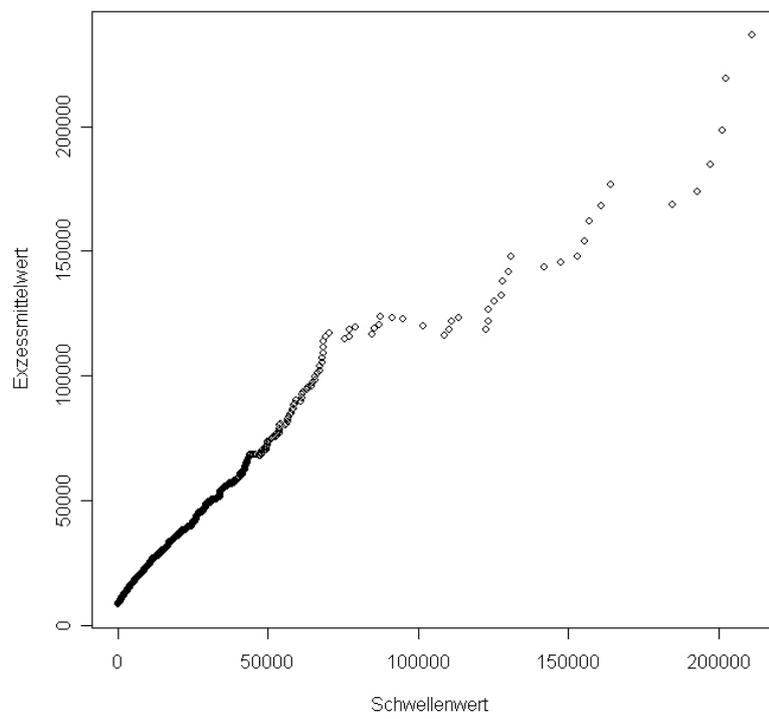
die diese Eigenschaft aufweisen, spricht dies für eine Approximation durch eine GPD-Verteilung (vgl. Abschnitt 3.1.1.4 und Reiss und Thomas (2001)). Die positive Steigung der SMEF spricht ebenfalls für eine langsam abfallende Dichte am Verteilungsende, also für einen Gestaltparameter  $\xi > 0$ . Exponentialverteilungen weisen horizontale Exzessmittelwertfunktionen (MEF) auf. Verteilungen mit schneller abfallenden Dichten haben eine MEF mit negativer Steigung.

Abbildung C.2: SMEF-Plot



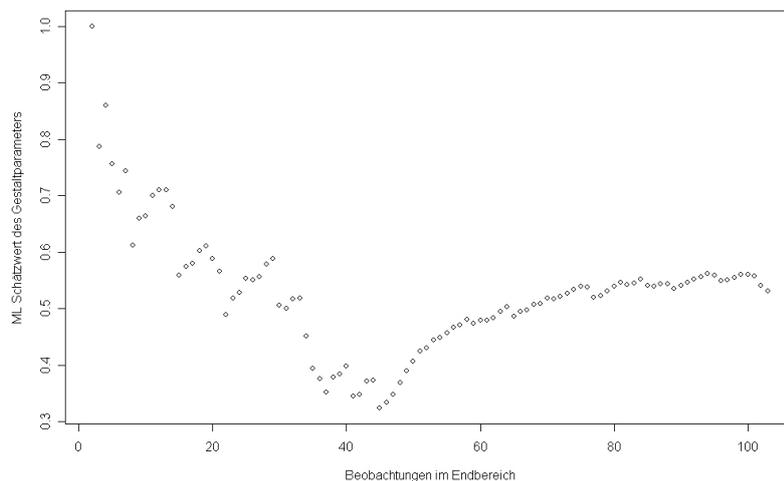
Um geeignete Schwellenwerte zu finden, werden die acht größten Beobachtungen in Abbildung C.3 nicht in den Graph einbezogen. Schwellenwerte in dieser Größenordnung hätten zur Folge, dass zu wenige Beobachtungen über der Schwelle lägen und kommen in sofern nicht in Betracht. Über einem geeigneten Schwellenwert sollte die SMEF annähernd einer Geraden folgen. Um die Auswirkungen verschiedener Schwellenwerte und der damit einhergehenden Anzahl der Beobachtungen über der Schwelle zu untersuchen, werden folgende Schwellen gewählt: 101 Beobachtungen von Verlusten über 47.000, 45 Beobachtungen von Verlusten über 70.000 und 26 Beobachtungen von Verlusten über 125.000.

Abbildung C.3: SMEF-Plot ohne die größten acht Verluste



Moscadelli (2004) schlägt vor, die Wahl des Schwellenwertes durch die Stabilität der GPD gegenüber Anhebung des Schwellenwertes zu überprüfen (vgl. Abschnitt 3.1.1.4). In Abbildung C.4 sind die mit verschiedenen Schwellenwerten resultierenden ML-Schätzwerte des Gestaltparameters über der Anzahl an Beobachtungen im Endbereich abgetragen. Wie zu erkennen ist, ist der Graph für die Schwellen von 70.000 und 125.000 (45 bzw. 26 Beobachtungen über der Schwelle) nicht stabil. Auch für den Schwellenwert von 47.000 (101 Beobachtungen im Endbereich) weist der Graph einen leichten Abwärtstrend auf. Die Zahl der Beobachtungen im Endbereich wird deshalb in Abbildung C.5 erweitert. Der Graph ist für mehr als 100 Beobachtungen stabil, weshalb im Folgenden zusätzlich der Schwellenwert von 29.000 mit 198 Beobachtungen in die Betrachtung einbezogen wird.

Abbildung C.4: Gestaltparameterschätzung für verschiedene Schwellenwerte



Zur Schätzung der Parameter werden nur die Beobachtungen über den jeweiligen Schwellenwerten herangezogen. Die vorliegenden Schätzwerte wurden in der Statistikumgebung R mit Hilfe der Bibliothek fExtremes mit der Maximum-Likelihood- (ML-) Methode und der Methode wahrscheinlichkeitsgewichteter Momente (PWM) geschätzt. Zusätzlich wurden die Parameter in Microsoft Excel mit der PWM Methode und dem Hill-Schätzer bestimmt. Dabei wurden die Formeln aus Embrechts et al. (1997) und Coleman (2003) verwendet. Die PWM wurden mit dem zweiten Schätzer in Abschnitt B.3 aus den empirischen Daten geschätzt. Die Ergebnisse weichen in unterschiedlicher Weise voneinander ab und sind Tabelle C.1 zu entnehmen. Die angegebenen Hill-Schätzer sind dabei Durchschnitte der annähernd stabilen Schätzwerte im Endbereich.

Abbildung C.6 zeigt die empirische Verteilung, die wahre, normalerweise

Abbildung C.5: Gestaltparameterschätzung für verschiedene Schwellenwerte

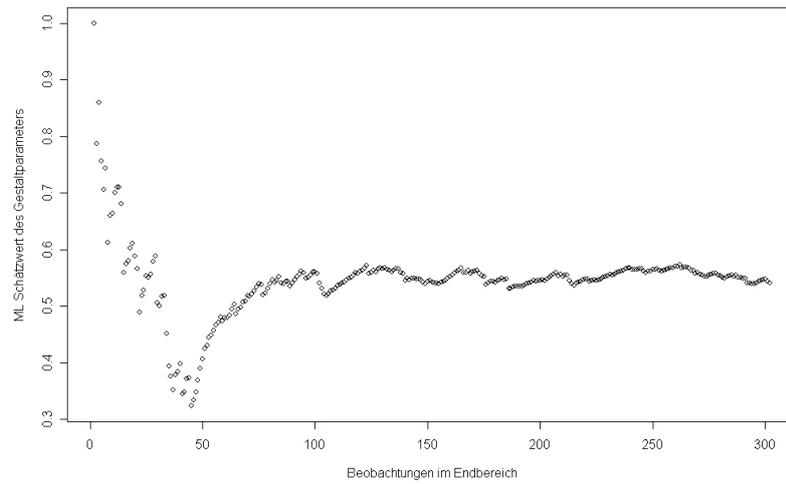
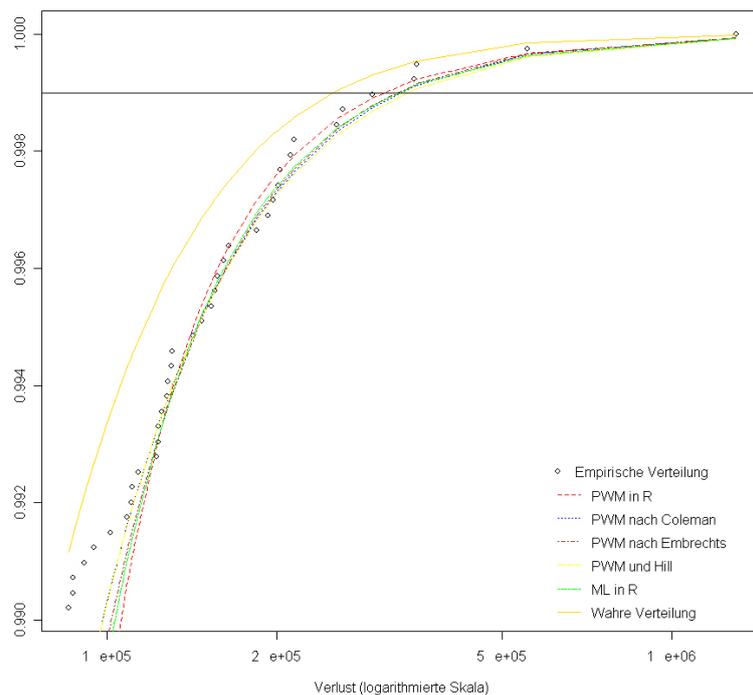


Tabelle C.1: Schätzwerte des Gestaltparameters

Schwellenwert	29.000	47.000	70.000	125.000
Beobachtungen	198	101	45	26
PWM in R	0,5463	0,5626	0,3442	0,5725
PWM nach Coleman	0,5264	0,4811	0,3840	0,4655
PWM nach Embrechts	0,5356	0,5419	0,2809	0,4896
ML in R	0,5825	0,6851	0,2913	0,5480
Hill	0,6458	0,6479	0,5191	0,5058

unbekannte Verteilung und die verschiedenen Approximationen exemplarisch für den Schwellenwert von 125.000. Der Hill-Schätzer wurde zusammen mit den PWM-Schätzern für Lage- und Skalenparameter nach Coleman (2003) verwendet.

Abbildung C.6: Verteilungsapproximationen im Endbereich



Die Unterschiede der Approximationen zum gleichen Schwellenwert sind gering. Die PWM-Schätzwerte in Verbindung mit dem Hill-Schätzer liefern leicht schlechtere Ergebnisse als die anderen Methoden. Daher wird im Folgenden nur die Anpassung über die ML-Methode betrachtet.

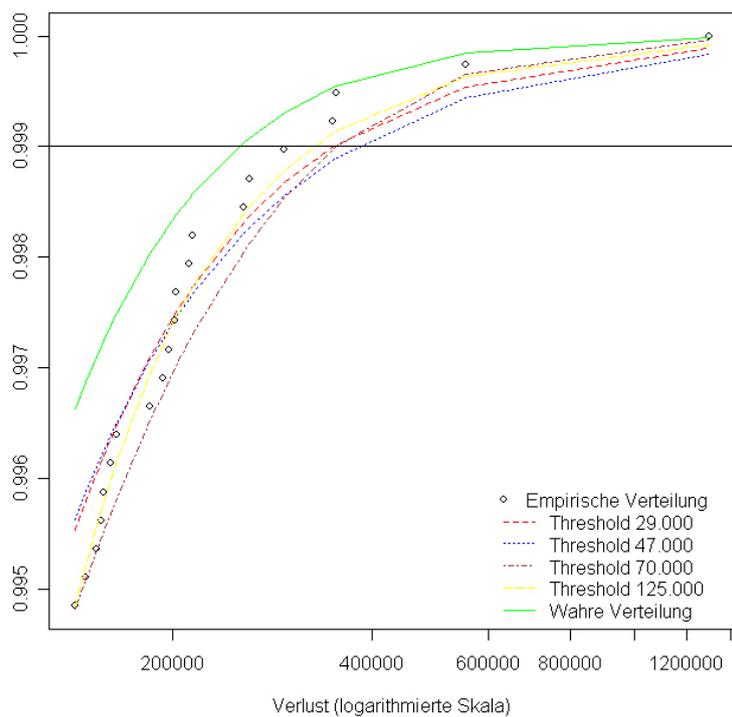
Tabelle C.2 zeigt die Ergebnisse unterschiedlicher Quantilschätzer für die unterschiedlichen Schwellenwerte. Die Ergebnisse der Approximationen mit Schwellenwerten über den empirischen Quantilen sind ausgespart. Abbildung C.7 zeigt die Approximationen für unterschiedliche Schwellenwerte graphisch.

Zur Überprüfung der Approximation werden die W-Statistiken herangezogen (vgl. Abschnitt 3.1.1.4). Abbildung C.8 zeigt die W-Statistiken geordnet nach dem zeitlichen Auftreten der Exzesse. Die Punktwolke lässt nicht auf eine systematische Abweichung schließen. Abbildung C.9 zeigt den QQ-Plot der W-Statistiken gegen die Exponentialverteilung exemplarisch für den

Tabelle C.2: Geschätzte Quantile der Verlusthöhe

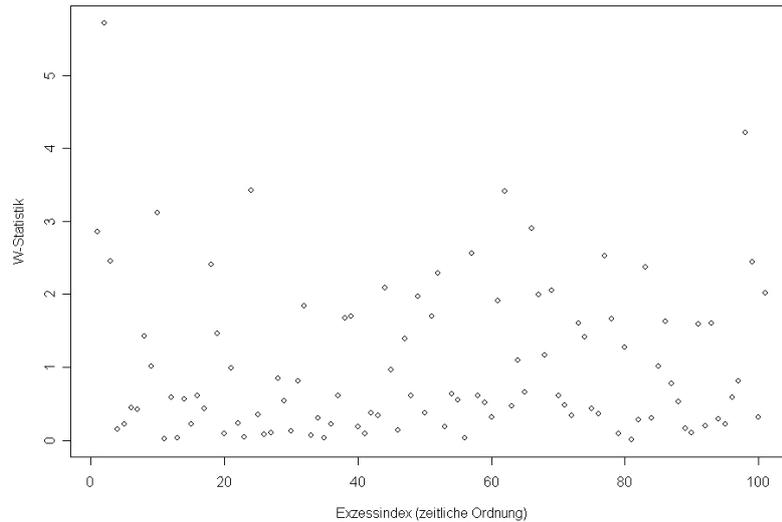
Quantil	Wahre Quantile	Empirische Quantile	Schwellenwert			
			29.000	47.000	70.000	125.000
0,95	28.776	29.315	29.443	-	-	-
0,97	40.994	42.318	42.108	-	-	-
0,99	79.979	85.654	86.220	83.731	82.067	-
0,999	251.538	349.525	349.749	377.198	354.023	327.365

Abbildung C.7: Verteilungsapproximationen im Endbereich



Schwellenwert von 47.000. Für alle Schwellenwerte liegen die W-Statistiken annähernd auf der Winkelhalbierenden und rechtfertigen damit das Modell.

Abbildung C.8: Punktwolke der W-Statistiken über die Zeit (Schwellenwert 47.000)



Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die relative Anzahl der Überschreitungen der Quantilswerte zu überprüfen und mit der theoretischen Anzahl zu vergleichen. Die Überschreitungen sind in Tabelle C.3 gegeben. Für den Schwellenwert von 29.000 werden alle Werte zum Teil stark überschritten.

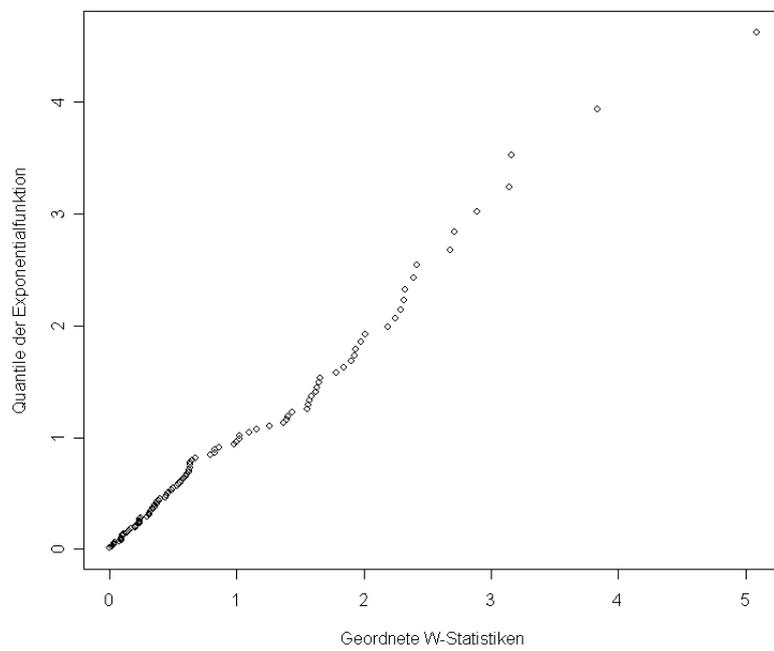
Tabelle C.3: Überschreitungen der geschätzten Quantile

Quantil	Theoretische Überschreitungen	Schwellenwert			
		29.000	47.000	70.000	125.000
0,95	5,0%	9,7%	-	-	-
0,97	3,0%	6,0%	-	-	-
0,99	1,0%	1,9%	1,0%	1,0%	-
0,999	0,1%	0,2%	0,1%	0,1%	0,1%

Insgesamt scheinen die Approximationen für die Schwellenwerte über 47.000 gute Ergebnisse zu liefern. Damit ausreichend Beobachtungen im Endbereich vorliegen wird der Schwellenwert von 47.000 gewählt und im Folgenden verwendet.

Für die Aggregation zur Gesamtschadenverteilung muss die gesamte Verteilung approximiert werden. Daher wird die gewonnene Approximation des

Abbildung C.9: QQ-Plot der W-Statistiken (Schwellenwert 47.000)



Endbereichs mit der empirischen Verteilung kombiniert. Der Übergangspunkt ist der Schwellenwert  $u$ . Die Kombination ist unproblematisch, da die Verteilungen in  $u$  gleich sind.

## C.2 Verlusthöhenverteilung: Block-Maxima-Methode

In diesem Abschnitt wird die Verlusthöhenverteilung mit Hilfe der Block-Maxima-Methode approximiert. Um einen Vergleich zur POT-Methode und der wahren, normalerweise unbekanntem Verlustverteilung zu erhalten, wird ausschließlich die Verlusthöhe ohne die zeitliche Komponente und vorherige Aggregation der Verlustdaten betrachtet.

Da die Anzahl der Ereignisse in festen Zeitintervallen stochastisch ist, kann die Einteilung in Blöcke hier nicht intuitiv erfolgen. Daher werden die Schätzwerte über der Blockgröße in Abbildung C.10 abgetragen. Dabei werden Blockgrößen von mehr als 300 Beobachtungen nicht einbezogen, da die Anzahl der resultierenden Maxima zu gering wäre. Da der Graph keine konstanten Teile aufweist, liegen keine weiteren Anhaltspunkte vor. Die Blockgröße wird willkürlich auf 130 Verluste festgelegt. Zum Vergleich werden zusätzlich Blockgrößen von 30, 50 und 200 Verlusten betrachtet.

Die resultierenden PWM-Schätzwerte sind Tabelle C.4 zu entnehmen.

Tabelle C.4: PWM-Schätzwerte der GEV Parameter

Anzahl Blöcke	130	78	30	20
Blockgröße	30	50	130	200
Gestaltparameter	0,5304	0,4958	0,4740	0,5488
Skalenparameter	28.157	39.814	67.243	66.554
Lageparameter	38.857	55.186	99.099	136.470

Die aus den verschiedenen Approximationen resultierenden Quantile, die empirischen Quantile und die wahren Quantile sind in Tabelle C.5 gegeben. Abbildung C.11 und C.12 zeigen die verschiedenen Approximationen im Vergleich zu der empirischen, der wahren und der durch die GPD approximierten Verteilung. Der Vergleich in beiden Abbildungen zeigt, dass die GEV-Approximationen mit Blockgrößen von 130 und 200 Beobachtungen erst oberhalb des 0,99-Quantils vergleichbare Ergebnisse liefern wie die restlichen Approximationen. Dies verdeutlicht die in Abschnitt 3.1.1.3 beschriebene Problematik, dass nicht bekannt ist, ab welchem Wert die Approximation Verwendung finden kann.

Wieder können verschiedene Verfahren zur Überprüfung der Approximation zur Anwendung kommen. Tabelle C.6 zeigt den Vergleich der Anzahl der theoretischen Überschreitungen der Quantile und der Anzahl der Überschreitungen über die bestimmten Quantile. Zempléni (2004) beschreibt weitere Anpassungstests und Modifikationen bestehender Testverfahren speziell für

Abbildung C.10: Schätzwerte des Gestaltparameters für verschiedene Blockgrößen

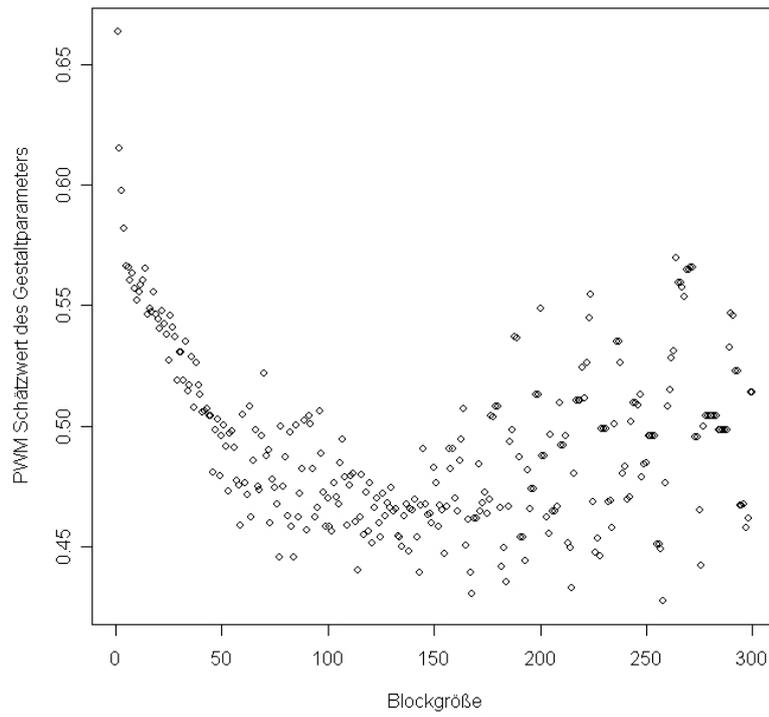


Tabelle C.5: Geschätzte Quantile der Verlusthöhe

Quantil	Empirische Quantile	Wahre Quantile	Blockgröße			
			30	50	130	200
0,95	29.315	28.776	28.009	25.226	14.953	48.993
0,97	42.318	40.994	41.458	40.069	31.126	60.184
0,99	85.654	79.979	86.039	87.837	82.212	97.870
0,999	349.525	251.538	326.660	329.444	330.284	308.442

Abbildung C.11: Approximation der Verlustverteilung

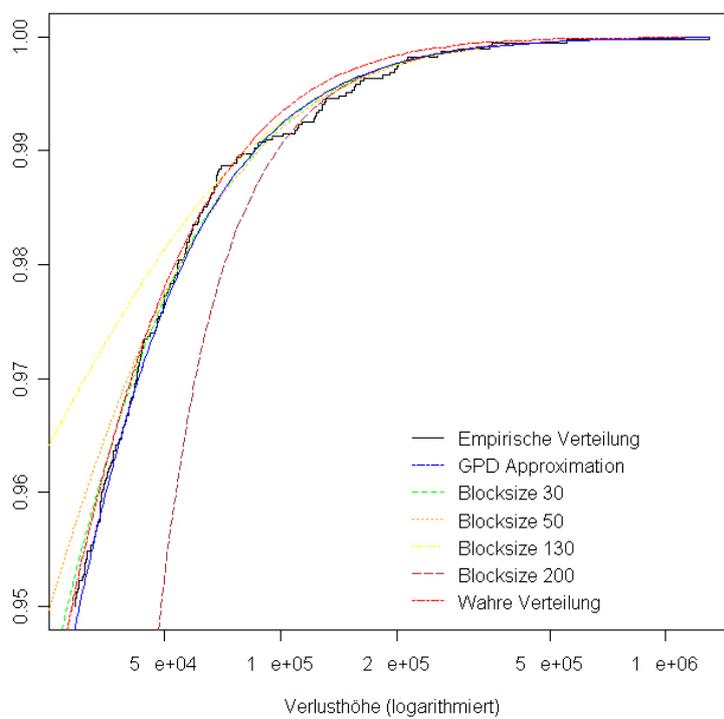
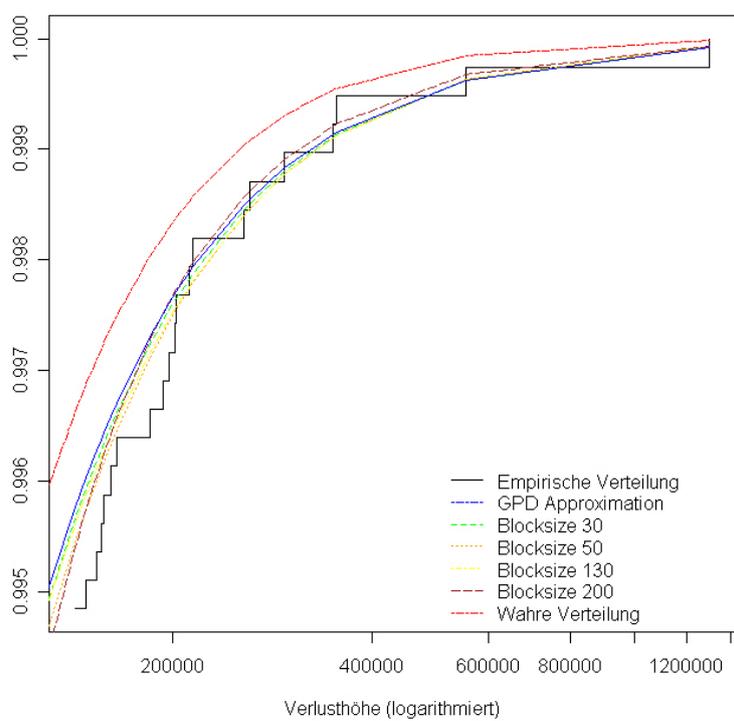


Abbildung C.12: Approximation der Verlustverteilung



GEV-Anwendungen.

Tabelle C.6: Relative Anzahl der Überschreitungen der Quantile

Quantil	Theoretische Überschreitungen	Blockgröße			
		30	50	130	200
0.95	5.0%	5.4%	6.3%	11.7%	2.5%
0.97	3.0%	3.2%	3.3%	4.6%	1.7%
0.99	1.0%	1.0%	0.9%	1.0%	0.9%
0.999	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%

Insgesamt liefern die Approximationen der Block-Maxima-Methode im hohen Quantilsbereich gute Ergebnisse, die mit denen der POT-Methode vergleichbar sind. Allerdings ist das weitere Vorgehen zur Bestimmung der gesamten Verteilung problematisch. Die Kombination z.B. mit der empirischen Verteilung liegt nahe, jedoch ist der Übergangspunkt nicht bekannt und kann nur willkürlich gewählt werden.

### C.3 Verlusthäufigkeitsverteilung

Zur Modellierung der Verlusthäufigkeiten wird die Anzahl der Verlustereignisse pro Tag gemessen und deren Häufigkeit im Zeitraum von fünf Jahren bestimmt. Die Häufigkeiten sind Tabelle C.7 zu entnehmen.

Tabelle C.7: Häufigkeiten der Anzahl der Verlustereignisse pro Tag

Verlustereignisse pro Tag	Häufigkeit	Relative Häufigkeit
0	65	0,05
1	204	0,16
2	303	0,23
3	283	0,22
4	201	0,15
5	121	0,09
6	77	0,06
7	28	0,02
8	12	0,01
9	5	0,00
10	0	0,00
11	1	0,00

Es werden eine Poisson- und eine negative Binomial-Verteilung an die Daten angepasst. Zur Bestimmung des Parameters wird im Fall der Poisson-

Verteilung der ML-Schätzer

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i n_i}{\sum_{i=1}^{\infty} n_i}$$

verwendet.

Im Falle der negativen Binomial-Verteilung werden die Parameter mit Hilfe der Momentengleichungen

$$r \frac{1-p}{p} = \frac{\sum_{i=1}^n i n_i}{n}$$

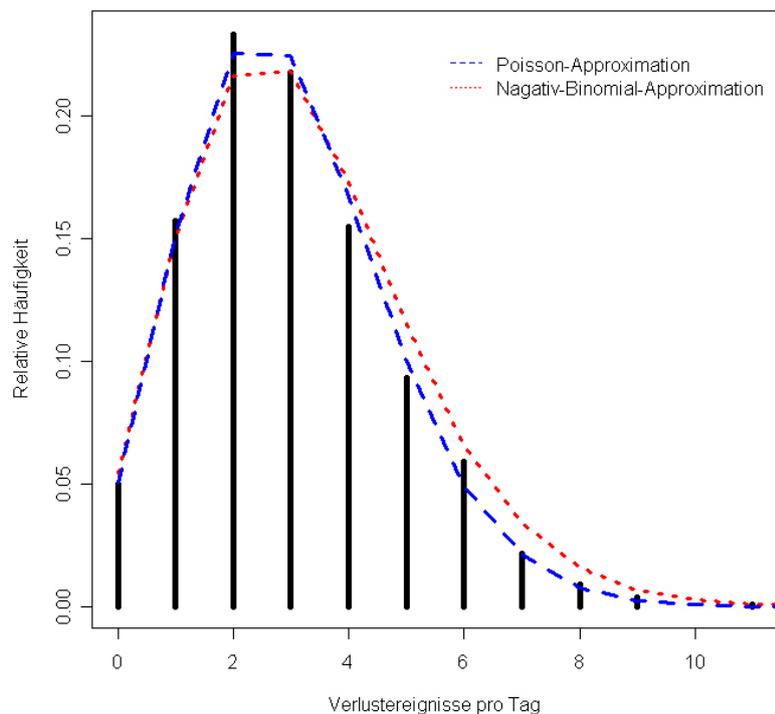
und

$$r \frac{1-p}{p^2} = \frac{\sum_{i=1}^n i^2 n_i}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n i n_i}{n} \right)^2$$

bestimmt.

Abbildung C.13 zeigt die beiden Approximationen im Vergleich zu den empirischen Daten.

Abbildung C.13: Approximation der Verlusthäufigkeit



Die graphische Überprüfung legt nahe, dass beide Modelle geeignet erscheinen. Zusätzlich wurde jeweils ein  $\chi^2$ -Anpassungstest durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle C.8 wiedergegeben. Dabei wird die Modellierung durch eine negative Binomial-Verteilung abgelehnt. Daher wird das Poisson-Modell gewählt.

Tabelle C.8: Ergebnisse der  $\chi^2$ -Anpassungstests

	Test-Statistik	Kritischer Wert (95%)	Kritischer Wert (99%)	p-Wert
Poisson-Modell	5,98	14,07	18,48	0,54
Neg. Binomial-Modell	27,03	15,51	20,09	0,001

## C.4 Aggregation

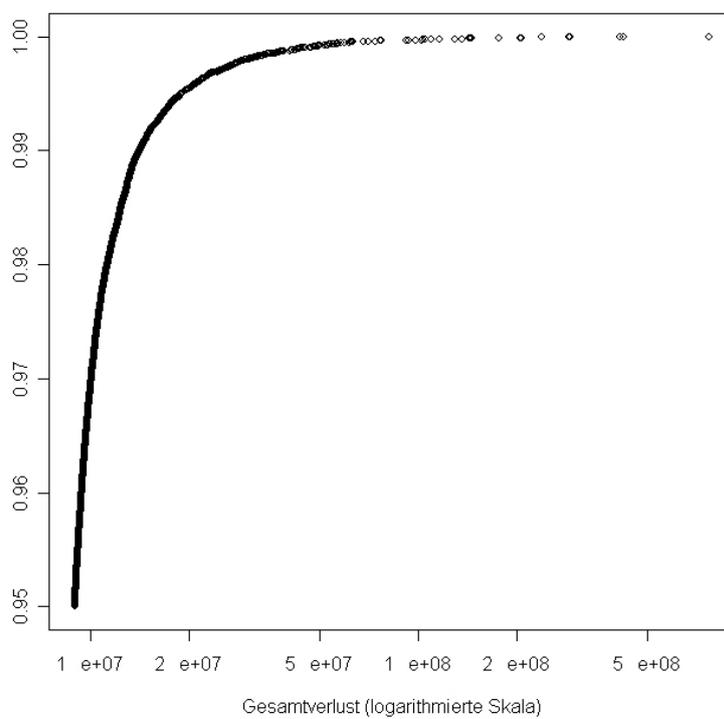
Die Aggregation zu einer Gesamtschadenverteilung über einen Horizont von einem Jahr erfolgt mittels Simulation. Dabei wird eine zufällige Anzahl der Verlustereignisse über eine Poisson-Verteilung mit Parameter  $(260\lambda)$  generiert ( $\lambda$  ist der Parameter, der im vorigen Abschnitt auf Tagesbasis ermittelt wurde). Danach werden entsprechend viele Verluste aus der Verlusthäufigkeitsverteilung gezogen und addiert. Die hier verwendete Verlusthöhenverteilung setzt sich aus der empirischen Verteilung und der Approximation des Endbereichs für Verluste über der Schwelle von 47.000 mittels GPD zusammen. Dieser Vorgang wurde 60.000-mal wiederholt. Die Ergebnisse der Simulation sind Tabelle C.9 zu entnehmen.

Tabelle C.9: Ergebnisse der Aggregation durch Simulation

Minimaler Verlust	3.995.000
Median	6.235.000
Erwarteter Verlust	6.703.000
95% Quantil (VaR)	8.981.751
99% Quantil (VaR)	14.170.110
99.9% Quantil (VaR)	44.744.139
Erwarteter Shortfall zum 99.9% Quantil	111.200.000
Maximaler Verlust	771.900.000

Abbildung C.14 zeigt das Ende der Gesamtschadenverteilung.

Abbildung C.14: Endbereich der Gesamtschadenverteilung durch Simulation



# Literaturverzeichnis

[Abberger 2005]

ABBERGER, Klaus: A simple graphical method to explore tail-dependence in stock-return pairs. In: *Applied Financial Economics* 15 (2005), Januar, Nr. 1, S. 43–51

[Adusei-Poku 2005]

ADUSEI-POKU, Kwabena: Operational Risk management - Implementing a Bayesian Network for Foreign Exchange and Money Market Settlement / Universität Göttingen. 2005. – Dissertation

[Albers und Skiera 1998]

ALBERS, Sönke ; SKIERA, Bernd: Regressionsanalyse. In: HERMANN, A. (Hrsg.) ; HOMBURG, C. (Hrsg.): *Marktforschung. Grundlagen - Methoden - Anwendungen*. 1998, S. 205–236

[Albrecht 2003]

ALBRECHT, Peter: Zur Messung von Finanzrisiken. 2003 (143). – Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft

[Alexander 2003a]

ALEXANDER, Carol: Managing operational risks with Bayesian networks. In: ALEXANDER, Carol (Hrsg.): *Operational risk: regulation, analysis and management*. Financial Times Prentice Hall, 2003, S. 285–295. – ISBN 0–273–65966–9

[Alexander 2003b]

ALEXANDER, Carol: Statistical models of operational loss. In: ALEXANDER, Carol (Hrsg.): *Operational risk: regulation, analysis and management*. Financial Times Prentice Hall, 2003, S. 129–170. – ISBN 0–273–65966–9

[Anders 2003]

ANDERS, Ulrich: The path to operational economic capital. In: ALEXANDER, Carol (Hrsg.): *Operational risk: regulation, analysis and management*. Financial Times Prentice Hall, 2003, S. 215–226. – ISBN 0–273–65966–9

- [Anders und Sandstedt 2003]  
 ANDERS, Ulrich ; SANDSTEDT, Michael: Self-Assessment zur Bewertung operativer Risiken. In: *Deutsches Risk* (2003), Juli
- [Artzner et al. 1999]  
 ARTZNER, Philippe ; DELBAEN, Freddy ; EBER, Jean-Marc ; HEATH, David: Coherent Measures of Risk. In: *Mathematical Finance* 9 (1999), Nr. 3, S. 203–228
- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1988]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: Internationale Konvergenz der Eigenkapitalmessung und Eigenkapitalanforderungen. (1988). – Deutsche Übersetzung - Aktualisiert 1998
- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1996a]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: Überblick über die Änderung der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung der Marktrisiken. (1996). – Deutsche Übersetzung
- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1996b]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: Änderung der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung der Marktrisiken. (1996). – Deutsche Übersetzung
- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1998]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: Management des Betriebsrisikos. (1998). – Deutsche Übersetzung
- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 1999]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: Neuregelung der angemessenen Eigenkapitalausstattung. (1999). – Deutsche Übersetzung
- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2001]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: Working Paper on the Regulatory Treatment of Operational Risk. (2001)
- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2002]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: The Quantitative Impact Study for Operational Risk: Overview of Individual Loss Data and Lessons Learned. (2002)
- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2003a]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: The 2002 Loss Data Collection Exercise for Operational Risk: Summary of the Data Collected. (2003), März

- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2003b]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: Management operationeller Risiken – Praxisempfehlungen für Banken und Bankenaufsicht. (2003). – Deutsche Übersetzung
- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2003c]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: Quantitative Impact Study 3 - Overview of Global Results. (2003), Mai
- [Basler Ausschuss für Bankenaufsicht 2004]  
 BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF S I C H T: Internationale Konvergenz der Eigenkapitalmessung und der Eigenkapitalanforderungen, Überarbeitete Rahmenvereinbarung. (2004). – Deutsche Übersetzung
- [Baud et al. 2002]  
 BAUD, Nicholas ; FRACHOT, Antoine ; RONCALLI, Thierry: Internal data, external data and consortium data for operational risk measurement: How to pool data properly? / Crédit Lyonnais. 2002. – Arbeitspapier
- [Böker 2004]  
 BÖKER, Fred: Statistik III: Bayes'sche Verfahren / Universität Göttingen. Version: 2004. <http://www.statoek.wiso.uni-goettingen.de/veranstaltungen/statistik3alt/daten/sec10.pdf>. – Vorlesungsskript. – Online-Ressource, Abruf: 28. Juni 2006
- [Blunden 2003]  
 BLUNDEN, Tony: Scorecard approaches. In: ALEXANDER, Carol (Hrsg.): *Operational risk: regulation, analysis and management*. Financial Times Prentice Hall, 2003, S. 229–240. – ISBN 0–273–65966–9
- [Bol 1999]  
 BOL, Georg: *Induktive Statistik*. 2., bearb. Aufl. Oldenbourg, 1999. – ISBN 3–486–25000–0
- [Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht 2005a]  
 BUNDESANSTALT FÜR FINANZDIENSTLEISTUNGS AUFS I C H T: Empfehlung des Fachgremium OpR zur Behandlung des erwarteten Verlustes im AMA. (2005). [http://www.bafin.de/basel\\_II/oprisk/051230\\_04.htm](http://www.bafin.de/basel_II/oprisk/051230_04.htm)
- [Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht 2005b]  
 BUNDESANSTALT FÜR FINANZDIENSTLEISTUNGS AUFS I C H T: Empfehlung des Fachgremiums OpR zur Berücksichtigung von Versicherungen in fortgeschrittenen Messansätzen. (2005). [http://www.bafin.de/basel\\_II/oprisk/051230\\_03.htm](http://www.bafin.de/basel_II/oprisk/051230_03.htm)
- [Chapelle et al. 2005]  
 CHAPELLE, Ariane ; CRAMA, Yves ; HÜBNER, Georges ; PETERS, Jean-Philippe: Measuring and managing operational

- risk in the financial sector: An integrated framework. (2005).  
[http://papers.ssrn.com/sol3/Delivery.cfm/SSRN\\_ID675186\\_code295970.pdf?abstractid=675186&mirid=1](http://papers.ssrn.com/sol3/Delivery.cfm/SSRN_ID675186_code295970.pdf?abstractid=675186&mirid=1)
- [Cherubini et al. 2005]  
 CHERUBINI, Umberto ; LUCIANO, Elisa ; VECCHIATO, Walter: *Copula methods in finance*. Wiley, 2005. – ISBN 0–470–86344–7
- [Coleman 2003]  
 COLEMAN, Rodney: Op risk modelling for extremes. In: *Operational Risk* 4 (2003), Nr. 1, S. 6–9
- [Cruz 2002]  
 CRUZ, Marcelo G.: *Modeling, measuring and hedging operational risk*. Wiley, 2002. – ISBN 0–471–51560–4
- [Currie 2004]  
 CURRIE, Carolyn V.: Basel II and Operational Risk - An Overview. In: CRUZ, Marcelo G. (Hrsg.): *Operational Risk modelling and analysis*. Risk Books, 2004. – ISBN 1–904339–34–4
- [Danielsson et al. 2000]  
 DANIELSSON, J. ; HAAN, L. de ; PENG, L. ; VRIES, C.G. de: Using a Bootstrap Method to Choose the Sample Fraction in Tail Index Estimation. 2000 (EI 2000-19/A). – Econometric Institute Report
- [Davison 1984]  
 DAVISON, A. C.: Modelling excesses over high thresholds, with an Application. In: OLIVEIRA, J. Tiago d. (Hrsg.): *Statistical extremes and applications*. Reidel, 1984, S. 461–482
- [Davison und Smith 1990]  
 DAVISON, A.C. ; SMITH, R.L.: Models for Exceedances over High Threshold. In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 52 (1990), Nr. 3, S. 393–442
- [Deutsche Bank 2004]  
 DEUTSCHE BANK: Risikobericht. Version: 2004. [http://geschaeftsbericht.deutsche-bank.de/2004/gb/servicesseiten/downloads/files/risikobericht\\_db\\_gb04.pdf](http://geschaeftsbericht.deutsche-bank.de/2004/gb/servicesseiten/downloads/files/risikobericht_db_gb04.pdf). – Geschäftsbereich. – Elektronische Ressource
- [Deutsche Bundesbank 2004]  
 DEUTSCHE BUNDESBANK: Neue Eigenkapitalanforderungen für Kreditinstitute (Basel II). 2004 (9). – Monatsbericht

- [Dupuis und Victoria-Feser 2003]  
 DUPUIS, Debbie J. ; VICTORIA-FESER, Maria-Pia: A Prediction Error Criterion for Choosing the Lower Quantile in Pareto Index Estimation. 2003. – Cahier de recherches
- [Embrechts und Chavez-Demoulin 2004]  
 EMBRECHTS, P. ; CHAVEZ-DEMOULIN, V.: Smooth extremal models in finance and insurance. In: *The Journal of Risk and Insurance* 71 (2004), Nr. 2, 183–199. <http://www.math.ethz.ch/%7Ebaltes/ftp/smooth.pdf>
- [Embrechts et al. 2003]  
 EMBRECHTS, P. ; FURRER, Hansjörg ; KAUFMANN, Roger: Quantifying regulatory capital for operational risk. In: *Derivatives Use, Trading & Regulation* 9 (2003), Nr. 3, 217–233. <http://www.math.ethz.ch/%7Ebaltes/ftp/OPRiskWeb.pdf>
- [Embrechts et al. 1997]  
 EMBRECHTS, Paul ; KLÜPPELBERG, Claudia ; MIKOSCH, Thomas: *Modelling extremal events*. Springer, 1997. – ISBN 3–540–60931–8
- [Fischer und Switzer 2001]  
 FISCHER, N.I. ; SWITZER, P.: Graphical Assessment of Dependence: Is a Picture Worth 100 Tests? In: *The American Statistician* 55 (2001), August, Nr. 3, S. 233–239
- [de Fontnouvelle et al. 2004]  
 FONTNOUVELLE, Patrick de ; ROSENGREN, Eric ; JORDAN, John: Implications of Alternative Operational Risk Modeling Techniques / Federal Reserve Bank of Boston. 2004. – Arbeitspapier
- [Frachot und Roncalli 2002]  
 FRACHOT, Antoine ; RONCALLI, Thierry: Mixing internal and external data for managing operational risk / Crédit Lyonnais. 2002. – Arbeitspapier
- [Frachot et al. 2004]  
 FRACHOT, Antoine ; RONCALLI, Thierry ; SAL, Eric: The Correlation Problem in Operational Risk / Crédit Lyonnais. 2004. – Arbeitspapier
- [Frees und Valdez 1998]  
 FREES, E.W. ; VALDEZ, E.A.: Understanding Relationships Using Copulas. In: *North American Actuarial Journal* 2 (1998), Nr. 1, S. 1–25
- [Genest und Rivest 1993]  
 GENEST, Christian ; RIVEST, Louis-Paul: Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas. In: *Journal of the American Statistical Association* 88 (1993), September, Nr. 423, S. 1034–1043

[Gramlich und Gramlich 2002]

GRAMLICH, Daniela ; GRAMLICH, Stefan: Darstellung und Würdigung Operationeller Risiken im Kontext von Basel II. In: ELLER, Roland (Hrsg.): *Handbuch Operationelle Risiken*. Schäffer-Poeschel, 2002. – ISBN 3-7910-1986-4

[Grandell 1976]

GRANDELL, J.: Doubly stochastic Poisson processes. In: *Lecture notes in mathematics* 539 (1976). – ISSN 1617-9692

[Hartung 2003]

HARTUNG, T.: Considerations to the quantification of operational risks / Ludwig-Maximilian-Universität München. 2003. – Arbeitspapier

[Haubenstock und Hardin 2003]

HAUBENSTOCK, Michael ; HARDIN, Lloyd: The Loss Distribution Approach. In: ALEXANDER, Carol (Hrsg.): *Operational risk: regulation, analysis and management*. Financial Times Prentice Hall, 2003, S. 171-192. – ISBN 0-273-65966-9

[Hawkins 2005]

HAWKINS, Ed: Vorticity Extremes in numerical simulations of 2-D geostrophic turbulence / University of Reading. Version: 2005. [www.maths.reading.ac.uk/Research/Publications/Msc\\_dissertations/Hawkins.pdf](http://www.maths.reading.ac.uk/Research/Publications/Msc_dissertations/Hawkins.pdf). – Forschungsbericht. – Elektronische Ressource

[Hill 1975]

HILL, Bruce M.: A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution. In: *The Annals of Statistics* 3 (1975), Nr. 5, S. 1163-1174

[Hipp 2000]

HIPP, Christian: Risikotheorie: Stochastische Methoden und Statistische Verfahren Teil 2 / Universität Karlsruhe (TH). 2000. – Vorlesungsskript

[Hipp 2001]

HIPP, Christian: Risikotheorie 1 / Universität Karlsruhe (TH). 2001. – Vorlesungsskript

[Holmes 2003]

HOLMES, Mark: Measuring operational risk: a reality check. In: *Risk* 16 (2003), September, Nr. 8

[Hosking und Wallis 1987]

HOSKING, J.R.M. ; WALLIS, J.R.: Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution. In: *Technometrics* 29 (1987), Nr. 3, S. 339-349

[Hosking et al. 1985]

HOSKING, J.R.M. ; WALLIS, J.R. ; WOOD, E.F.: Estimation of the Generalized Extreme-Value Distribution by the Method of Probability-Weighted Moments. In: *Technometrics* 27 (1985), Nr. 3, S. 251–261

[Kaiser 2006]

KAISER, Thomas: Operational Risk: Risikoarten in Finanzinstituten / Goethe-Universität Frankfurt am Main. 2006. – Vorlesungsfolien

[Lawrence 2003]

LAWRENCE, David: Operational Risk Implications of Basel II/CP3. Version: 2003. <http://www.Baselalert.com>. – Präsentation Risk Forum, 19. Juni 2003. – Online-Ressource, Abruf: 1. Juni 2006

[McNeil und Saladin 1997]

MCNEIL, A. J. ; SALADIN, T.: The peaks over thresholds method for estimating high quantiles of loss distributions. 1997. – Proceedings of XXVIIth International ASTIN Colloquium, Cairns, Australia. – 23–43 S

[McNeil und Frey 2000]

MCNEIL, Alexander J. ; FREY, Rüdiger: Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach. In: *Journal of Empirical Finance* 7 (2000), Nr. 3-4, 271–300. <http://www.mathematik.uni-leipzig.de/MI/frey//evt-garch.pdf>

[McNeil et al. 2005]

MCNEIL, Alexander J. ; FREY, Rüdiger ; EMBRECHTS, Paul: *Quantitative risk management*. Princeton Univ. Press, 2005. – ISBN 0–691–12255–5

[Minz 2004]

MINZ, Kirsten-Annette: *Operationelle Risiken in Kreditinstituten*. 1. Aufl. Bankakad.-Verl., 2004. – ISBN 3–933165–69–5

[Moscadelli 2004]

MOSCADELLI, Marco: The modelling of operational risk: experience with the analysis of the data collected by the Basel Committee / Banca D’Italia. Version: Juli 2004. [http://www.bancaditalia.it/ricerca/consultazioni/temidi/td04/td517/td\\_517/tema\\_517.pdf](http://www.bancaditalia.it/ricerca/consultazioni/temidi/td04/td517/td_517/tema_517.pdf) (517). – Temi di discussione del Servizio Studi. – Online-Ressource, Abruf: 7. Februar 2006

[Okunev 2005]

OKUNEV, Pavel: A Simple Approach to Combining Internal and External Operational Loss Data / Lawrence Berkeley National Laboratory, UC Berkeley and Bank of America. 2005. – Arbeitspapier

[Pötzelberger 2006]

PÖTZELBERGER, Klaus: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Simulation stochastischer Modelle / Wirtschaftsuniversität Wien. Version: 2006. <http://statmath.wu-wien.ac.at/courses/wsim/WSim-Folien4.pdf>. – Vorlesungsfolien. – Online-Ressource, Abruf: 22. Juni 2006

[Reiss und Thomas 2001]

REISS, Rolf-Dieter ; THOMAS, Michael: *Statistical analysis of extreme values*. 2. ed. Birkhäuser, 2001. – ISBN 3-7643-6487-4

[Shih et al. 2000]

SHIH, Jimmy ; SAMAD-KHAN, A.H. ; MEDAPA, Pat: Operational Risk: Is the Size of an Operational Loss Related to Firm Size? In: *Operational Risk* 9 (2000), Januar, Nr. 3, S. 217–233

[Smith 1990]

SMITH, R. L.: Extreme Value Theory. In: LEDERMANN, W. (Hrsg.): *Handbook of Applicable Mathematics, Supplement*. Wiley, 1990, S. 437–472

[Smith 1985]

SMITH, Richard L.: Maximum Likelihood Estimation in a Class of Non-regular Cases. In: *Biometrika* 72 (1985), Nr. 1, S. 67–90

[Smith 1989]

SMITH, R.L.: Extreme Value Analysis of Environmental Time Series: An Application to Trend Detection in Ground-Level Ozone. In: *Statistical Science* 4 (1989), Nr. 4, S. 367–377

[Smithson und Song 2004]

SMITHSON, Charles ; SONG, Paul: Quantifying operational risk. In: *Risk* (2004), Juli, S. 57–59

[Stickelmann 2002]

STICKELMANN, Karsten: Operationelles Risiko - Abgrenzung, Definition und Anforderungen gemäß Basel II. In: ELLER, Roland (Hrsg.): *Handbuch Operationelle Risiken*. Schäffer-Poeschel, 2002. – ISBN 3-7910-1986-4

[Waldmann und Stocker 2004]

WALDMANN, Karl-Heinz ; STOCKER, Ulrike M.: *Stochastische Modelle*. Springer, 2004. – ISBN 3-540-03241-X

[Zempléni 2004]

ZEMPLÉNI, András: Goodness-of- tests in extreme value applications. (2004)

[Zentraler Kreditausschuss 2001]

ZENTRALER KREDITAUSSCHUSS: Stellungnahme des Zentralen Kreditausschusses zum Konsultationspapier des Baseler Ausschusses zur Neuregelung der angemessenen Eigenkapitalausstattung von Kreditinstituten vom 16. Januar 2001 („Basel II“). (2001)